

Vejstrækningers geometri

Indhold

Indledning	2
Fagterminologi	15
Hastighedsbegreber	19
Kræfter og energi	26
Friktion	35
Friktionens fysik	36
Friktion og vejgeometri	46
Kørseldynamik i længdeprofilet	55
Igangsætning	55
Oversigt i vertikalkurver	57
Retardation og acceleration	69
Komfort	72
Vertikalkurveradier	72
Kørseldynamik i linjeføringen	74
Udskridning og væltning	75
Komfortabel kurvekørsel	76
Oversigt i horisontalkurve	79
Horisontalkurveradier	83
Linjeføringselementer	84
Den rette linje	84
Cirkelbuen	86
Overgangskurver	89
Andre linjeføringskurver	105
Linjeberegning	106
Længdeprofilelementer	115
Den rette linje	115
Cirkel- og parabelbuer	116
Længdeprofilberegning	116
Afslutning	118
Appendiks A – Notation	119
Bibliografi	121

Indledning

Vejgeometri

Vejgeometri handler om at fastlægge, beskrive og præsentere vejens geometriske udformning. Teknisk set er det, der fastlægges, vejens tracé, udtrykt ved linjeføringen og længdeprofilet, jævnfør Figur 1, samt vejens tværprofiler, jævnfør Figur 2.

Beskrivelsen, der skabes, er en geometrisk repræsentation af vejen. På grundlag af denne repræsentation er det muligt at beregne kartesiske (XYZ) koordinater til alle tangent- og knæpunkter i tracéet og i tværprofilerne og dermed i princippet til ethvert punkt på vejoverfladen.

Med kendskab til det omkringliggende landskabs højdeforhold (koter) giver det grundlag for at vurdere, om vejanlægget er placeret hensigtsmæssigt, således, at der er en god jordbalance; på en lang, bred vejstrækning kan nogle få decimeters hævnings eller sænkning af længdeprofilet eliminere et betydeligt jordoverskud eller jordunderskud.

Koordinatrepræsentationen af vejen gør det også muligt at overføre vejens geometri til konstruktion af fx perspektivtegninger (centralprojektioner), der anvendes i forbindelse med visuelle præsentationer og fotomontager af vejanlægget og dets indpasning i det omgivende landskab. Disse præsentationer vil oftest være ledsaget af forklarende og uddybende tekst, så også lægmand kan tolke resultatet og forholde sig til det.

Koordinatrepræsentationen tjener også til beregning af omfanget af de ydelser, der skal præsteres, og af afsætningsdata, der anvendes, når vejen skal anlægges i marken.

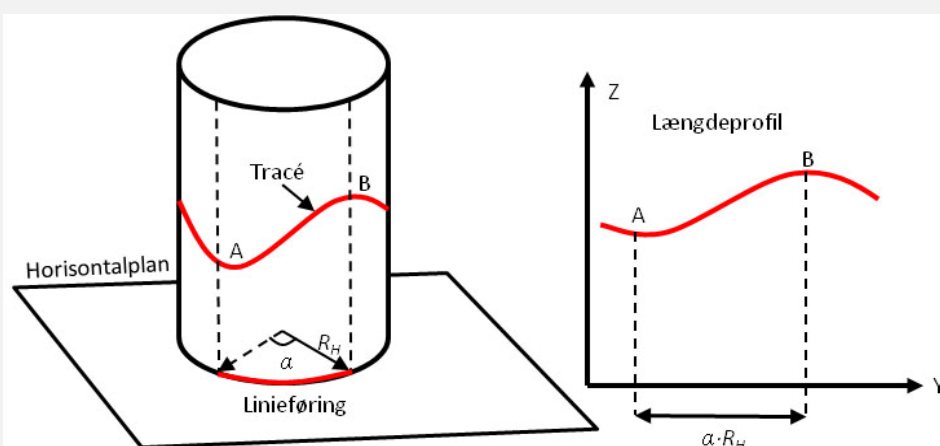
Vejgeometri betjener sig således i høj grad af den grundlæggende matematik, der anvendes i den klassiske rumgeometri.

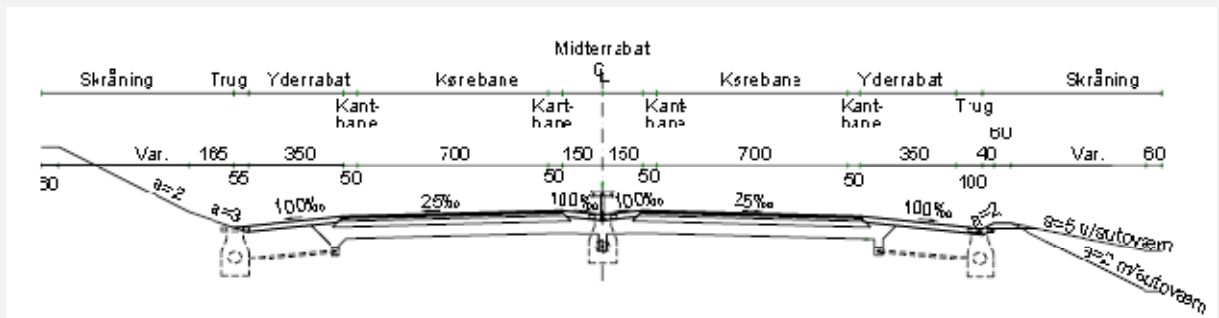
Vejingeniøren, der arbejder med vejgeometri, skal således dels skabe vejens overordnede design, dels bearbejde dette design, så ingeniøren i tegninger, tekst og tal kan kommunikere designet, herunder indpasning i omgivelserne, mængder og konsekvenser, såvel til offentligheden og beslutningstagere som til andre teknikere, blandt andet den entreprenør, der udfører projektet.

Tracéet vil være begrænset af en række givne bindinger fra den kommende vejs omgivelser. Det gælder tvangspunkter ved tilslutning til det eksisterende vejnet – eksempelvis skal der ved forlægning af en delstrækning typisk være en naturlig, glidende overgang til de eksisterende strækninger i begge ender. Det gælder krydsninger af veje, enten i eller ude af niveau. Og det gælder hensyn til diverse andre interesser, der oftest vil udstikke en korridor, nogle steder ganske smal og på andre delstrækninger med større vidde, inden for hvilken tracéet skal holde sig.

Figur 1. Vejens tracé fastlægger linjeføringen og længdesnitsplanen i det overordnede XYZ-koordinatsystem. Længdeprofilet fremkommer ved at udfolde længdesnitsplanen.

Figur: Erik Kjems.





Figur 2. Tværsnit af 4-sporet vej med $2 \cdot 8,0$ m kørebanebredder, fordelt med 2 kørespor i hver retning à 3,5 m og 2 kantbaner à 0,5 m; derudover anlægges 3 m midterrabat med autoværn. Yderrabatter og trug til afvandning anlægges i en bredde på 4 m i afgravning og 4,5 m i påfyldning; skråning udføres med hældningen 1:3 eller 1:2 i afgravning og hældningen 1:5 i påfyldning. Ring 3 ved Odense. Fra (1).

Tracéet og tværprofilet skal inden for disse begrænsninger gøre det muligt for trafikanterne at færdes sikkert og komfortabelt ved den forudsatte hastighed for vejstrækningen. Dette indebærer blandt andet:

- At der ikke er risiko for, at køretøjet vælter eller glider af vejen.
- At der ikke optræder højdeforskelle, som køretøjet ikke kan overvinde.
- At trafikanten ikke bliver udsat for påvirkninger i form af accelerationer og ryk, der er ukomfortable.
- At trafikanten kan opfatte en eventuel hindring på kørebanen så betids, at det er muligt at bringe køretøjet til standsning.
- At to modkørende trafikanter kan opfatte hinanden så betids, at det er muligt at bringe køretøjerne til standsning.
- At trafikanten, hvor der skal være overhalingsmulighed, kan opfatte eventuelle hindringer eller modkørende trafik på den aktuelle delstrækning så betids, at det er muligt at afslutte eller afbryde overhalingsmanøvren.

Vejgeometri hviler således på grundlæggende fysiske sammenhænge, navnlig de kraftpåvirkninger, der optræder, når et køretøj færdes på en vej. Disse sammenhænge søges udtrykt gennem simple modeller fra den klassiske mekaniske fysik. Modellerne er suppleret med, ligeledes simple, modeller for trafikanternes adfærd.

Gode vejgeometriske løsninger rummer, udover hensyntagen til de sammenhænge, som kan opstilles ved hjælp af modeller fra den mekaniske fysik, også et mål af æstetiske kvaliteter. Der er gennem praksis udviklet nogle håndregler, som er sat på matematisk-geometrisk form. Med disse håndregler kan man forebygge visse æstetiske fejlgreb eller få støtte til en kritisk vurdering af den geometriske løsning. Kendskab til de praksisskabte håndregler indgår i det håndværk, der udgør den grundlæggende vejgeometri.

God landskabs- og byarkitektonisk indpasning og formgivning af vej- og gaderum kan dog ikke generelt sættes på formler. Smukke vejgeometriske løsninger kræver derfor, udover beherskelse af håndværket, tillige talent, der skal plejes og udvikles gennem praktisk og selvkritisk virke.

Til disse overordnede rumlige hensyn føjer sig behovet for at afpasse designets detaljer til de lokale vilkår, herunder nødvendigheden af tillige at tilgodese naboer og natur.

Afgrænsning

Sigtet er undervisningsbrug på de danske ingeniøruddannelser, navnlig de indledende semestre på civilingeniøruddannelsen i vej- og trafikteknik ved Aalborg Universitet. Målet er at give de

studerende en helt grundlæggende forståelse for det vejgeometriske håndværks begreber, forudsætninger og metoder. På den baggrund er emnet afgrænset i flere henseender.

Fokus er især de fysiske forudsætninger og kørselsdynamiske og vejgeometriske modeller, der indgår i de danske vejregler. Vægten er lagt på forholdene i det åbne land.

Alene håndværket og det ingeniørvidenskabelige grundlag behandles. De landskabsarkitektoniske kvaliteter, som skal inddrages ved formgivningen og indplaceringen af et vejanlæg, falder uden for, i det omfang de ikke er tilgodeset af etablerede håndregler fra praksis. De danske vejregelforslag og vejregler for vejudformning i det åbne land henholdsvis i byområder rummer vejledninger, som bør iagttages, ligesom der findes speciallitteratur om emnet (2), (3), (4).

I praksis projekteres alle vejanlæg og vejombygninger ved hjælp af edb; i Danmark er programmer fra system familierne NovaPoint® og MicroStation® således i dag de mest udbredte. Brugen af disse programsystemer til den vejgeometriske projektering behandles ikke; herom henvises i stedet til systemernes respektive manualer. Målet er derimod at formidle de principper, som også programsystemerne bygger på, og at skabe forståelse af de sammenhænge, der gælder mellem forudsætninger og valg, der skal træffes, og de konsekvenser, som dette har for tracéringselementerne.

Udgangspunktet er vejgeometrien for en almindelig vejstrækning, der er beregnet for motortrafik, i det åbne land. Beskrivelsen kan dog uden store vanskeligheder udvides til også at gælde motorvejsstrækninger såvel som rene stianlæg. Det kan ske ved inddragelse af de danske vejreglers værdier for de tracéringselementer, der gælder her, og vejledninger om udformningen af motorveje og stier.

Indenfor bebyggede områder gælder gennemgangen af vejgeometrien for så vidt også. Her er de randvilkår, som kravene fra omgivelserne stiller, dog oftest anderledes komplekse. Forståelse for de vejgeometriske sammenhænge er afgørende for at fastlægge brugbare løsninger; men i praksis skal der indenfor bebyggede områder oftest inddrages flere, og tit modstridende, hensyn end de rent vejgeometriske for at finde løsninger, der vil være acceptable.

Vejgeometrien beskæftiger sig naturligvis også med udformning af kryds. Denne del af vejgeometrien behandles ikke.

Tilgrænsende fagområder

Fastlæggelsen af en vejs udformning er i praksis en iterativ proces med flere parallelle forløb. Der er tale om, at der skal ske en optimering – eller i det mindste findes acceptable løsninger – i flere henseender, og at hensynet til disse indvirker på hinanden.

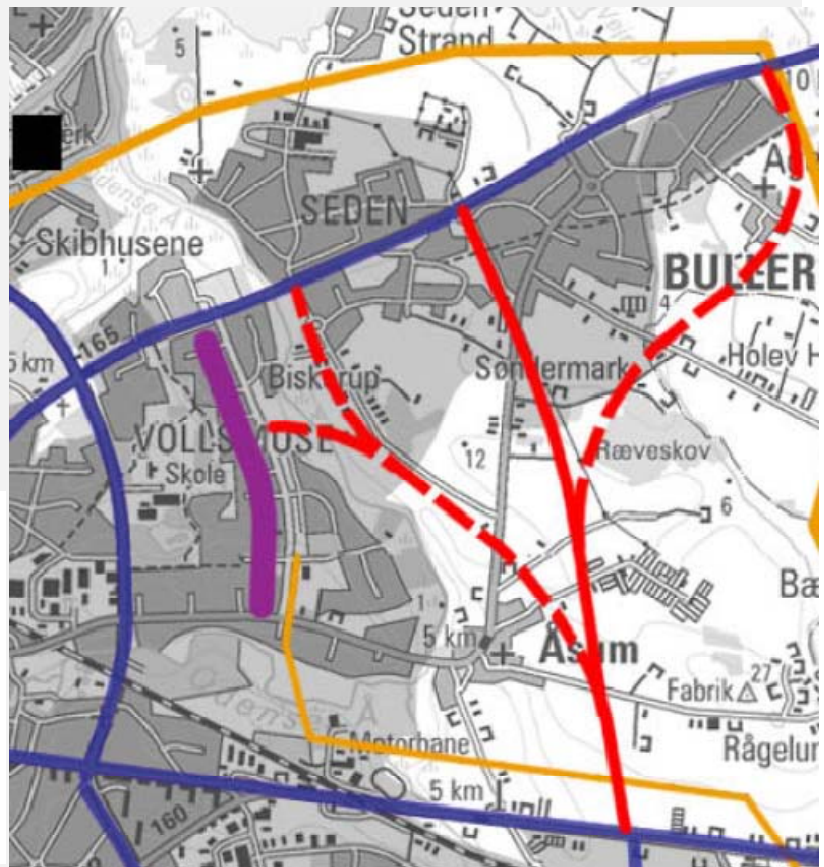
Successionen i fastlæggelsen betyder, at det tidligt var interessant at introducere edb-teknikker til de vejgeometriske beregninger. Det skete i Danmark allerede i 1960'erne. Successionen betyder også, at det er arbejdsbesparende at tilrettelægge og holde styr på beregningerne, således at mest muligt kan genfindes og genbruges i løbet af processen.

Fastlæggelsen af den vejgeometriske udformning er et væsentligt led i denne proces, men altså ikke det eneste. En række andre forhold kan ikke fastlægges, før det geometriske forløb er kendt; men omvendt influerer disse elementer på vejgeometrien og kan gøre det nødvendigt at ændre og justere geometrien.

Planlægning

Vej- og trafikplanlægningen afstikker selvfølgelig vejens overordnede funktion og hastighedsklasse samt krav om koblinger til det eksisterende vejnet. Planlægningen kortlægger og afhandler en række af de bindinger, som den kommende vej skal respektere i forhold til omgivelserne. Gennem en afvejning af interessenter ustikker planlægningen den korridor, af vekslende bredde, inden for hvilken tracéet skal ligge, jævnfør Figur 3.

Figur 3. Blandt de bindinger, der fastlægger korridorer for den kommende vej er ikke blot hensyn til natur- og miljøkvaliteter, men også hensyn til eksisterende bebyggelse og andre tekniske anlæg, samt behovet for tilkobling til det eksisterende vejnet. I planlægningsfaserne vurderes løsningsforslag i forskellige korridorer. Ring 3 ved Odense. Mål cirka 1:50.000. (1).



Planlægningen angiver ligeledes vejtypen og dermed den principielle opbygning af vejens tværprofil. Tillige kan planlægningen have afklaret, hvordan projekteringen skal håndtere nogle af de gener, som projektet vil give – eksempelvis vil ofte der være taget stilling til, om der er behov for anlæg af støjbegrænsende foranstaltninger eller behov for faunapassager.

De planlægningsmæssige og landskabsarkitektoniske hensyn fastlægger bindinger for og influerer på flere overordnede designkriterier for vejens tracé.

Afvanding

Vejafvandingen kan naturligvis først fastlægges, når vejgeometrien er på plads, da tracéet afgør, hvilke muligheder der er for at lede vejvandet bort. Placeringen af de recipienter, der skal modtage vejvandet, er til gengæld helt afgørende for detailudformningen af afvandingselementerne i selve vejkonstruktionen og for placeringen af eventuelle bassiner til magasinering af regnvand.

Såvel vejgrøfter som rør i trug skal helst fungere ved gravitationsprincippet. Derfor kan mulighederne for at komme af med vandet gøre det fordelagtigt at give afvandingskonstruktionerne fald modsat vejens længdefald på visse strækninger. Herved øges vejanlæggets samlede bredde, hvilket afspejler sig i det areal, som skal inddrages, og i mængden af jord, som skal flyttes.

Geoteknik og belægning

Dimensioneringen af vejens belægning tager udgangspunkt i den forventede trafikbelastning og i styrkeegenskaberne af den jord, vejens skal bygges oven på.

Dimensioneringen fastlægger befæstelsens samlede tykkelse, koblingshøjden, der angiver afstanden fra færdigvejsoverfladen til råjordsoverfladen under færdselsarealerne. Kendskab til denne afstand er afgørende for at kunne fastlægge vejens længdeprofil, således at jordarbejdet kan minimeres.

Figur 4. Beplantning er et organisk element, der med stor virkning kan bruges til at understøtte og understrege tracéets visuelle indtryk og sammenhængen mellem landskab og vej. Det kurvede vejforløb er ofte en oplevelse i sig selv, og beplantningen bør udformes, så den understøtter landskabsoplevelsen, fx med grupper af træer. Der kan også være udsigter, som man helst vil være fri for, såsom grimt byggeri, autoophug el. lign. Dem kan et levende hegn skjule. Fra (5).



Omvendt har jordens styrkeegenskaber indflydelse på opbygningen af såvel selve befæstelsen som af hele vejkonstruktionen. Varierende jordmaterialer langs tracéet giver derfor anledning til at befæstelsens opbygning og tykkelse med fordel fastlægges strækningsvis., således at man udnytter den eksisterende jords kvaliteter. Det kan betyde, at koblingshøjden ændrer sig fra delstrækning til delstrækning.

Ligeledes betyder den vekslende geologi langs tracéet, at eksempelvis vejdæmnninger og vejens skråninger må udformes og styrkemæssigt eftervises med hensyntagen til de aktuelle geotekniske parametre på det enkelte sted.

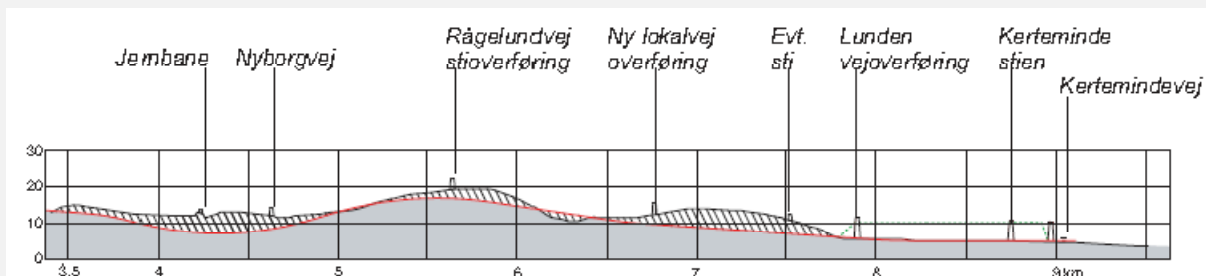
Afmærkning og udstyr

Vejens afmærkning og udstyr understøtter det visuelle indtryk, som selve vejanlægget giver gennem tracéet og tværprofilet, jævnfør Figur 4. Afmærkningen og udstyret kan imidlertid også indvirke på det arealbehov, som vejen giver anledning til. Eksempelvis medfører opstilling af udstyr, herunder autoværn, nær færdselsarealerne, behov for en breddeforøgelse, der skal indarbejdes i tværprofilet mellem vejkrone og vejanlæggets sidearealer med afvandingskonstruktionerne.

Tilsvarende gælder fx støjvolde og -skærme samt brobygningsværker på vejanlægget.

Anlægsøkonomi

Vejanlæggets jordarbejde, der flere gange er berørt ovenfor, er udtryk for en hensyntagen til anlægsøkonomien. Jordflytningen er en væsentlig post i anlægsbudgettet. Omkostningen afhænger af, hvor meget jord, der skal flyttes, og hvor langt jorden skal flyttes.



Figur 5. Vejen indpasses i landskabet, således at længdeprofilet får et jævnt forløb med mulighed for at etablere de forudsatte krydsninger i og ude af niveau. Der tilstræbes harmoni med landskabet og at der er balance i jordmængderne på anlægsarbejdet. Længdeprofil fra planlægning. Ring 3 ved Odense. Højder er 20-doblet. Nord mod højre. Fra (1)

Det tilstræbes normalt, at en ny vejstrækning har jordbalance, jævnfør Figur 5. Det betyder, at de jordmængder, der skal afgraves et sted på vejstrækningen, kan udlægges et andet sted på strækningen. Herved sikres, at der alene skal tilføres de vejbygningsmaterialer, som vejbelægningen kræver, og således at der alene skal bortskaffes jordmængder, der er uegnet til at indbygge i vejen, samt den muld, der ikke kan genplaceres på vejens rabat- og sidearealer.

Det tilstræbes også, at vejanlægget så vidt muligt følger terrænets overordnede kurver. Dels vil dette i reglen give det æstetisk bedste resultat, dels vil der herved ofte være mulighed for at opnå jordbalance inden for kortere delstrækninger.

Naboret og arealerhvervelse

Endeligt skal nævnes, at naboforhold skal tillægges en betydelig vægt og kan betyde justeringer af tracéet endog meget sent i projekteringsforløbet.

Navnlig hvor en nabo til et nyt eller ændret vejanlæg har væsentlige, legitime interesser i at få vejanlægget på en »fornuftig« afstand af hensyn til støjpåvirkning eller mulighed for at udnytte sin jord så uhindret som muligt, er det af betydning, at vejanlægget er søgt optimeret under størst mulig hensyntagen til naboens tarv.

Selv når naboen først meget sent i projekteringsforløbet fremkommer med sådanne interesser, fx i forbindelse med arealerhvervelsen, vil det være naturligt at forvente, at vejanlægget søges justeret, så der tages mest muligt hensyn hertil, i det omfang det kan ske uden at der gås på kompromis med vejanlæggets og trafikken grundlæggende kvaliteter.

Nødvendigheden af en god dialog med vejanlæggets naboer er en af de vigtigste bevæggrunde til den kommunikationsopgave, der er knyttet til ethvert vejprojekt.

Kørselsdynamik

Modeller og forudsætninger

Vejgeometri hviler på grundlæggende geometriske og fysiske sammenhænge, navnlig de kraftpåvirkninger, der optræder, når et køretøj færdes på en vej. Disse sammenhænge søges udtrykt gennem simple modeller fra den klassiske mekaniske fysik.

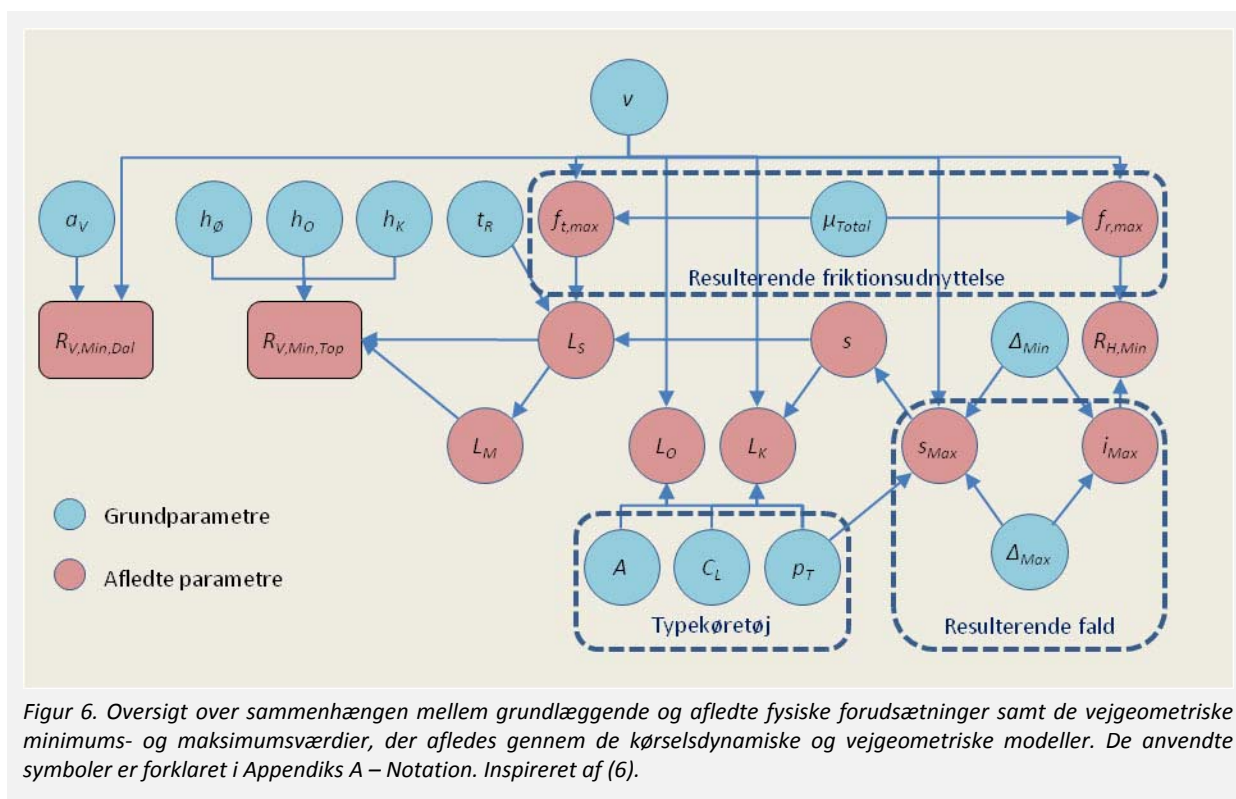
Kørselsdynamikken beskæftiger sig med disse modeller og med de forudsætninger, der er gjort som input til modellerne.

De grundlæggende forudsætninger angår køretøjets fysiske udstrækning (fx længde, bredde og højde) og ydeevne (fx svingradius, acceleration og deceleration).

Forudsætningerne angår endvidere egenskaber ved vejoverfladen (fx friktion). Endelig angår forudsætningerne trafikanternes præstationsevner (fx reaktionstider) og komfortkrav (fx tolerance over for ryk).

Forudsætningerne betegnes ofte »fysiske forudsætninger«, selv om de også rummer forudsætninger om blandt andet trafikanternes formåen og inddrager modeller for trafikanternes adfærd. Beskrivelsen kan eventuelt dele sig i forudsætninger, eller grundparametre, der relaterer sig til køretøjet, til vejen, til trafikanten henholdsvis til omgivelserne, og i afledte parametre. De afledte parametre begrænser råderummet ved tracéeringen.

Det samlede billede er altså et kompleks af geometriske, fysiske, mekaniske og adfærdsbeskrivende modeller, der på grundlag af fastlagte, grundlæggende fysiske forudsætninger udleder krav til vejens geometriske elementer samt andre fysiske størrelser, der anvendes i vejgeometrien. Vejingeniøren må afpasse sit design hertil og skal kunne eftervise, at tracéet opfylder kravene, og derved respekterer de fysiske lovmæssigheder, der er forudsat i modellerne og gennem de fastsatte fysiske forudsætninger.



De mest gængse grundparametre og afledte parametre, og deres sammenhænge, er oversigtligt illustreret i Figur 6.

Fastlæggelse af fysiske forudsætninger

Fælles for de fastlagte, fysiske forudsætninger er, at modellerne traditionelt arbejder deterministisk med standardiserede værdier, der forsøger at give et sandt billede af virkeligheden. Nogle værdier kan være valgt til den »sikre« side, men er dog realistiske.

For nogle af de fysiske forudsætninger, anvendes værdier, som enten er fremkommet på grundlag af statistikker eller er baseret på eller udtrykt gennem krav i lovgivningen. Herved er det, i alle fald formelt, sikret, at forudsætningerne er opfyldt eller ikke overskrides. Fx stiller »dimensionsbekendtgørelsen« (7), der er udsendt i medfør af færdselsloven, krav til køretøjernes størrelse og vægt.

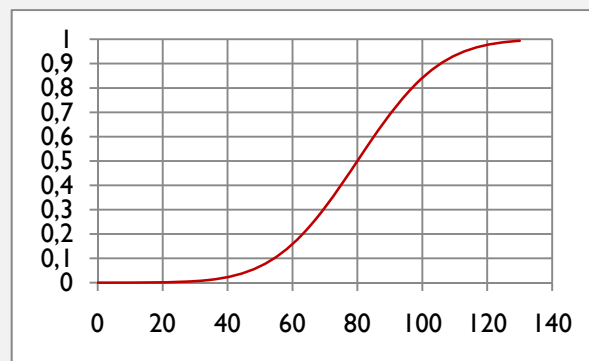
Andre værdier sikres tilvejebragt gennem krav til vejens udformning og udførelse og krav til de anvendte materialer. Fx stiller vejbestyrelserne gennem udbudsmaterialet krav om den friktion, som det under standardiserede forhold er muligt at måle på en nyudlagt vejoverflade. Denne målte friktionsværdi er ikke den samme som den, der vil optræde under kørsel, men der er empirisk belæg for at vejbelægningens friktionsegenskaber lever op til de kørselsdynamiske modellers forudsætninger, når den målte friktionsværdi opfylder de krav, der stilles gennem de standardiserede bestemmelser i vejreglernes udbudsforskrifter.

Atter andre værdier baserer sig på forsøg eller observationer og på analyser af samt modeller til beskrivelse af trafikanternes adfærd og af trafikulykker.

Trafikanternes aldersmæssige sammensætning og adfærd ændrer sig over tiden. Også køretøjsparken ændrer sig, og køretøjerne forsynes med indretninger, der giver stedse bedre køreegenskaber. Derfor er de fysiske forudsætninger ikke konstante, men udvikler sig gradvist.

Der dannes løbende, såvel i Danmark som i udlandet, ny viden, som må vurderes, eftervises og inddrages i arbejdsgrundlaget.

Figur 7. Når fordelingerne for de fysiske forudsætninger, der indgår i den kørselsdynamiske model, kan beskrives, vil man ofte basere sig på værdier, der tilgodeser 85 % af de enkelte værdier. Eksemplet viser en normalfordeling med middelværdi 80 og spredning 20, svarende til at 85 %-fraktilen er 100.



Hvor det er muligt at give en rimelig beskrivelse af en fordeling for en parameter, kan denne fordeling lægges til grund. I de tilfælde, hvor flere parametre samvirker, er det ofte praksis, at man for den enkelte parameter baserer sig på den værdi, der tilgodeser 85 % af hændelserne, jævnfør Figur 7. Risikoen for, at to uafhængige parametre samtidigt falder ugunstigt ud, er 2 %; men som det er illustreret i Figur 6 er der tale om, at det i reglen er fire eller flere parametre, der samvirker. Man gør altså den antagelse, at det er lidet sandsynligt, at samtlige parametre samtidigt vil overskride den valgte grænse. Det betyder, at man har valgt at forvente, at det samlede udfald ikke vil give problemer.

Hovedreglen er, at der arbejdes direkte med de fastlagte værdier. Sikkerheden er tilgodeset gennem selve fastlæggelsen af værdierne for de fysiske forudsætninger. Der arbejdes altså ikke med partialkoefficienter, således som det er kendt fra blandt andet bygningsstatikken. Der arbejdes heller ikke med stokastiske modeller til at indbygge eller vurdere en sikkerhed i de valgte løsninger gennem simulering, således som det fx sker i modellerne til dimensionering af vejbefæstelser.

Vejregler

Vejene trækker nogle af de ældste kulturspor, der stadig kan ses i landskabet. Vejenes levetid er lang, og hovedparten af det danske vejnet er tilvejebragt over flere århundreder og vidner om behov for samfærdsel. Vejene er opgraderet, hvad angår fast belægning og udstyr. Der kan være sket punktvis ændringer og forbedringer i vejforløbet, men det er kun få veje, der er nedlagt eller forlagt.

Som de ligger, gengiver vejene også den geometriske standard, man tilstræbte, da vejene blev anlagt eller da et sving blev rettet ud. For nogle af de ældste vejstrækninger, kan dette være et kulturhistorisk adelsmærke, der bør hæges om. I alle tilfælde er den enkelte vejstrækning historiske udtryk fakta, som man er nødt til at forholde sig, når man skal vurdere eventuelle aktuelle projekter.

Ældre danske vejregler

Vejforordningen fra 1793

Christian VII's »Forordning om Vej-Væsenet i Danmark«, af 13. december 1793, regnes som indvarslingen af det moderne danske vejvæsen. Forordningen indgik blandt de omfattende reformer, der på flere områder blev forberedt og gennemført i kølvandet på kronprins Frederiks statskup i 1784. (8)(9)

Forordningen rummer såvel bestemmelser om vejenes administration og vedligehold som anvisninger om vejenes udformning, som stadig genfindes på vejnettet. Det gælder blandt andet bestemmelser om mindste bredder på hovedlandeveje, landeveje henholdsvis biveje samt i forordningens § 9, stk. 2 kravet om den såkaldte »vejalen«: »Den Side af Grøvten, som vender til Vegen, bør have noget mere Skraaning, end den anden; derimod maae, paa den anden Side, Fra

Grøvtranden, i det mindste en Brede af 1 Alen tilhøre Landevejen, og ikke af den tilstødende Grunds Eier benyttes.»

1793-forordningen blev i de følgende 150 år fulgt af diverse bestemmelser, knyttet til de ændringer, der skete af vejlovgivningen.

1943-reglerne

På store dele af det fagområde, der angår vejgeometrien på strækninger i det åbne land er de senest egentligt godkendte, danske vejregler de bestemmelser, som det daværende Ministeriet for offentlige Arbejder udsendte i 1943 (10).

1943-vejreglerne behandler en ganske anden trafik end den, der i dag kører på de danske veje, og den viden og de forudsætninger om køretøjer og trafikantadfærd, vejreglerne hviler på, er efterhånden ganske bedaget.

Selvom reglerne vist nok aldrig er blevet formelt afløst in extenso, kan det ikke anbefales, at lægge disse »gamle« danske vejregler til grund for projektering af tidssvarende vejanlæg, der skal indfri de forventninger, som dagens trafikanter stiller.

Udkast til vejregler

Udkast til vejregler fra 1960 (11), og den senere udgave med enkelte rettelser fra 1964 (12), blev udfærdiget i henhold til vejbestyrelsesloven fra 1957, men blev aldrig formelt knæsat.

Udkastene anvendtes imidlertid gennem en årrække blandt andet i forbindelse med vurderingen af, om vejprojekter kunne opnå statslige tilskud fra vejfonden. Udkastene satte derfor sit præg på mange af sin samtids vejprojekter.

Motorvejsreglerne

Motorvejsreglerne (13) blev udsendt som løbsbladssystem i årene 1970-74. De er udarbejdet til supplerende og detaljering af udkast til vejregler fra 1964 (12).

Reglernes bestemmelser skulle anvendes ved al projektering af motorveje i Danmark. De rummer endvidere anvisninger, der skulle anvendes, hvor der i forbindelse med motorvejsarbejder skulle foretages nyanlæg og større omlægninger af det underordnede vejnet.

De nye danske vejregler

De danske vejregler har karakter af tekniske forskrifter og anbefalinger. De er tilgængelige på Internettet, jævnfør Figur 8.

Figur 8. Vejreglerne findes på Internettet, se: www.vejregler.dk Forsiden viser ind til vejreglernes 8 hovedområder:

0. Generelt
1. Trafikarealer, land
2. Trafikarealer, by
3. Veje
4. Broer
5. Færdselsregulering
6. Udstyr
7. Auditering

Udbudsforskrifterne har sin egen side. De kan findes på www.udbudsforskrifter.dk



Vejreglerne indgår sjældent direkte i den sagsbehandling, der sker i forhold til borgerne; men de ligger bag udformningen vejbestyrelsernes projekter mv.

Det overordnede formål med vejreglerne er at danne grundlag for, at der i Danmark findes et ensartet vejnet og en god trafiksikkerhedsmæssig standard. Reglerne medvirker også til, at vejsektoren udvikles i bæredygtig retning, og at opgaverne løses på den mest effektive måde.

Vejreglernes hjemmel og status

I henhold til § 6, stk. 1, i lov om offentlige veje (vejloven) kan transportministeren »fastsætte almindelige regler og normer for anlæg, vedligeholdelse og drift af de offentlige veje, herunder for vejenes forhold til omgivelserne, for entreprisbetingelser og for sådanne forhold, som i øvrigt er af betydning for vejnettets ensartethed og trafiksikkerhed«. Lov om private fællesveje (privatvejsloven) giver i § 24, stk. 3, tilsvarende hjemmel, for så vidt angår private fællesveje i byer og bymæssige områder, men ikke hvad angår private fællesveje på landet.

Herudover angiver § 95, stk. 1, i Færdselsloven, at transportministeren kan fastsætte bestemmelser om udformningen og betydningen af færdselstavler, afmærkning på kørebanen, signalanlæg og anden afmærkning eller indretning på eller ved vej til regulering af eller til vejledning for færdslen, og § 95, stk. 3, i Færdselsloven, angiver, at transportministeren kan fastsætte bestemmelser om anvendelsen af afmærkningen i § 95, stk. 1, herunder om indhentelse af samtykke fra politiet.

Reglerne om udformning og betydning af afmærkningen findes i Vejafmærkningsbekendtgørelsen, reglerne om anvendelsen af afmærkningen findes først og fremmest i bekendtgørelsen om anvendelse af vejafmærkning (anvendelsesbekendtgørelsen), mens de tekniske forskrifter om udformning og anvendelse af afmærkningen indgår i vejregelkomplekset.

Vejreglerne kan overordnet set betragtes som en samling af den vej- og trafiktekniske viden og erfaring, som dygtige, erfarne fagfolk anbefaler deres kolleger i sektoren at anvende. Det vil sige en slags *best practice* for fagområdet veje- og trafik.

Vejreglerne indeholder imidlertid også, om end i mindre omfang, normer, dvs. bindende regler, som skal følges – alternativt skal der søges dispensation.

Vejregelmaterialet består af de egentlige vejregler samt forslag og foreløbige udgaver hertil. I tilknytning hertil foreligger eksempelsamlinger, idékataloger og andet informationsmateriale.

En særskilt gruppe udgør vejreglernes udbudsforskrifter. Det er materiale, der er udformet med henblik på anvendelse inden for vejsektorens entreprisarbejder, dvs. anlægsarbejder, leverancer samt drifts- og vedligeholdelsesarbejder. Udbudsforskrifter er udarbejdet for en række entreprisedele, og de indeholder dels generelle dokumenter, som kan indgå direkte i det konkrete udbudsmateriale, dels paradigmer, som tilpasses det specifikke udbudsmateriale.

Tilvejebringelsen af vejregler

Vejregler udarbejdes i Vejregelorganisationen. Vejreglerådet er vejregelorganisationens øverste faglige organ. Rådet behandler og godkender forslag til vejregler og yder herudover blandt andet teknisk rådgivning til Vejdirektoratet i forbindelse med vejregelarbejdet. Vejreglerådet er sammensat med repræsentanter for nogle af vejsektorens hovedinteressenter.

Selve det praktiske arbejde med udarbejdelse af vejregler er organiseret i en række arbejdsgrupper, som både stat, kommuner, politi og andre myndigheder, rådgivere, entreprenører m.fl. leverer arbejdskraft til. Vejreglerne inddeles normalt under 8 hovedområder, jævnfør Figur 8. Inddelingen er dog mest oversigtlig, da de fleste opgaver indebærer anvendelser af vejregelmateriale fra flere, eventuelt alle hovedområder.

Vejregler sendes i høring, før de knæses endeligt. Simple revisioner, fx som følge af ny lovgivning eller nye europæiske standarder, indarbejdes dog administrativt af Vejdirektoratet.

Processen med at udarbejde, høre og endeligt godkende vejregler kan være ganske langvarig, og ofte udgør vejregelforslag, der er i høring det *de facto* mest opdaterede arbejdsgrundlag, selv om det (endnu) ikke er godkendt.

Vejreglernes regelstruktur

Vejreglernes bestemmelser inddeles i normer, retningslinjer, vejledninger og kommentarer, og et vejregelhæfte kan principielt indeholde bestemmelser af alle kategorier.

Bestemmelserne vil ofte være ledsaget af forklaringer, eventuelt med omtale af forsøg og erfaringer. Vejreglerne er dog karrige med egentlige henvisninger til de anvendte kilder. Derfor fordrer det god indsigt at bedømme, hvornår det er forsvarligt og anbefalelsesværdigt at fravige vejreglernes bestemmelser.

Normer

Normer omfatter fundamentale forudsætninger og krav. Normtekster kan være forsynet med kommentarer, men vil normalt ikke angive metoder, der bør eller kan anvendes for at få de specificerede krav opfyldt. Normer skal altid følges. Kommunale vejbestyrelser og vejmyndigheders fravigelse af normer udstedt med hjemmel i vejlovens § 6, stk. 1 og privatvejslovens § 24, stk. 3, kan dog ske med dispensation fra Vejdirektoratet, mens Vejdirektoratets fravigelse af sådanne normer kræver dispensation fra Transportministeriet.

Retningslinjer

Retningslinjer er regler til anvendelse under normale forhold. Retningslinjer indeholder angivelse af metoder, der bør anvendes til løsning af bestemte problemer og kan indeholde anbefalinger af typeløsninger og typekonstruktioner til brug under specificerede betingelser. Retningslinjer bør så vidt muligt følges, medmindre omstændighederne i konkrete tilfælde gør det nødvendigt eller fordelagtigt at fravige dem.

Vejledninger

Vejledninger indeholder rådgivning baseret på ajourført erfaringsmateriale, og deres anvendelse vil normalt være hensigtsmæssig.

Kommentarer

Kommentarer indeholder forklaringer og uddybende tekst til ovennævnte normer, retningslinjer og vejledninger. Kommentarer kan ligeledes indeholde henvisninger til andre bindende regler.

Fravigelse af vejreglernes normer og retningslinjer

Hvis det i forbindelse med en vejprojekt eller en sagsbehandling findes ønskeligt at fravige en norm i en gældende vejregel, må der forberedes en sag med angivelse af hvilken vejregelnorm, der ønskes fraveget, hvor på vejnettet fravigelsen vil ske, og hvorfor fravigelsen anses for ønskelig. Notatet kan i givet fald danne indgå i vejbestyrelsens dispensationsansøgning.

Hvis det tilsvarende findes ønskeligt at fravige en retningslinje i en gældende vejregel, bør der ligeledes udarbejdes et notat, der angiver hvilken vejregelretningslinje, der ønskes fraveget, hvor på vejnettet fravigelsen vil ske, og hvorfor fravigelsen anses for ønskelig. Notatet kan tjene som dokumentation for det skøn, vejbestyrelsen har udøvet, hvis den skulle blive klandret, at vejreglernes retningslinjer ikke er fulgt.

Generelt bør vejprojekter og sagsbehandling ske med udgangspunkt i de til enhver tid *gældende* vejregler. Imidlertid indeholder vejregelforslag, der er udsendt til høring mv., forslag til nye eller ændrede normer og retningslinjer. Disse ændringer vil, som nævnt, være baseret på nyere viden end den, der ligger til grund for de gældende vejregler. Sådanne ændrede bestemmelser kan derfor inspirere til og motivere, at man ønsker at fravige normer og retningslinjer i de gældende vejregler.

Det forhold, at der er nye vejregler under vejs kan imidlertid ikke undskylde, at man undlader at søge om dispensation til fravigelse fra *gældende* normer eller undlader at dokumentere, hvorfor man fraviger *gældende* retningslinjer. Men de kan gøre begrundelsen lettere. Det skal dog bemærkes, at det hænder, at nye formuleringer i vejregelforslag revideres på baggrund af høringen, fordi de viser sig at være affattet uhensigtsmæssigt, eller fordi praktiske erfaringer eller endnu nyere viden tilsiger det.

For så vidt angår vejledninger er der som nævnt tale om en beskrivelse af *best practice*, som det normalt vil være hensigtsmæssigt at følge. Heri ligger også, at der forekommer situationer, hvor det kan være mere hensigtsmæssigt at gøre noget andet. Det konkrete valg er det op til vejbestyrelsen at træffe.

Vejregler om vejgeometri

Den seneste samlede fremstilling af de fysiske forudsætninger og kørselsdynamiske og vejgeometriske modeller, der i de danske vejregler anvendes til fastlæggelse af vejstrækningers geometri er angivet i vejregelforslaget for veje og stier i det åbne land, hæfte 1 om fysiske forudsætninger (14), hæfte 2 om tracéring (15) samt rettelsesblade (16).

Forslaget til danske vejregler for veje og stier i åbent land er udarbejdet af en projektgruppe, som det daværende Vejregeludvalg nedsatte i 1994. Fra projektgruppen foreligger endvidere vejregelforberedende rapport vedrørende planlægning af veje og stier i åbent land (17) samt vejregelforslag vedrørende tværprofiler, hæfte 3 (18), (19), og vedrørende kryds, hæfte 4 (20), (21), (22), (23), (24), samt rettelsesblade (16).

Vejreglerne for veje og stier i åbent land var planlagt slutbehandlet i Vejregelrådet i 2008; men behandlingen blev udskudt. Vejregelrådet har senest medio 2009 truffet beslutning om ændring af de fysiske forudsætninger, der lægges til grund for fastsættelsen af standselængder på motorveje. (25)(26)

I det følgende henviser udtrykkene »de danske vejregler«, »vejreglerne« og tilsvarende til dette kompleks af vejregelforslag, hvor ikke andet er anført.

Indenfor bebyggede områder bør gennemgangen ses i lyset af de danske vejregler for byernes trafikarealer, blandt andet hæfterne 0-3, (27), (28), (10), (29), samt hæfte 10 om det visuelle miljø (30).

Tracéringsværdier

Almindelige tracéringsværdier

De danske vejregelforslag for vejudformning i det åbne land, navnlig hæfterne 1 og 2, (14), (15), angiver generelle krav vedrørende sigt, herunder værdier for stopsigt, mødesigt og overhalingsigt, og vedrørende vertikal- og horisontalkurver mv. Disse krav udledes, når den ønskede hastighed er kendt, af de fastlagte, fysiske forudsætninger samt de modeller, der gennemgås efterfølgende.

Det er en forudsætning ved fastlæggelse af en vejs tracé, at de relevante krav til sigt er opfyldt.

Vejregelforslagene giver endvidere maksimums- og minimumsværdier for elementer i linjeføringen, længdeprofilet og tværprofilet og for sammenhængen mellem disse elementer. Det gælder blandt andet for horisontal- og vertikalkurvernes radier og for længde- og tværgradienter.

De maksimums- og minimumsværdier, der gælder for den valgte ønskede hastighed for vejen, bør tilgodeses i forbindelse med alle nyanlæg og større ombygninger.

Exceptionelle tracéringsværdier

Vejregelforslagene angiver imidlertid, at det i forbindelse med ombygninger, navnlig af mindre veje, i visse situationer kan være naturligt og nødvendigt at fravige de minimums- og maksimumsværdier, som den ønskede hastighed fastlægger. For nogle tracéringsparametre angiver vejregelforslagene derfor også exceptionelle minimums- eller maksimumsværdier.

Bemærk, at der *ikke* arbejdes med exceptionelle værdier i forbindelse med de sigtstørrelser, der skal etableres.

Brugen af exceptionelle tracéingsværdier

Vejregelforslagene knytter to væsentlige bemærkninger til de anførte exceptionelle værdier:

- De exceptionelle værdier bør aldrig overskrides
- Brug af tracéingsværdier, som ligger mellem de almindelige og de exceptionelle værdier, bør kun anvendes undtagelsesvist og alene, hvor det er stærke motiver herfor, og i så fald kun i det absolut nødvendige omfang

Vejregelforslagene angiver således, at overskridelse af de almindelige tracéingsværdier *»kan være motiveret ved, at vejens indpasning i landskabsrammerne skal fastholdes, eller ved at der skal være en sammenhæng og harmoni med det omkringliggende vejanlægs tracé«*.

Vejreglerne angiver endvidere:

- at den strækning, hvor de almindelige tracéingsværdier overskrides, skal være kortest mulig
- at overskridelserne af minimums- og maksimumsværdierne skal være mindst mulige
- at fravigelserne skal angå så få tracéingsforudsætninger som muligt

Endelig angiver vejregelforslagene, at det nøje må vurderes, hvilke konsekvenser der kan være for trafikken og for omgivelserne ved overskridelse af de almindelige tracéingsværdier, og at *»der skal træffes de nødvendige foranstaltninger til at imødegå uheldige konsekvenser. Eksempelvis kan hensynet til trafiksikkerheden nødvendiggøre en helt særlig indsats for at etablere optisk føring, afmærkning, oversigtsdeklarationer, lokal hastighedsbegrænsning etc.«*

Fagterminologi

Vejnomenklatur

Vej- og trafikfaget har sin egen fagterminologi. En forudsætning for håndtering af tracéringsopgaverne er kendskab til denne terminologi. Grundlæggende definitioner findes i *Vej- og trafikteknisk ordbog* (31). De følgende definitioner hviler herpå

Tracé, linjeføring og længdeprofil

Tracéen er den rumkurve, der beskriver vejens forløb.

Tracéen knytter sig til et givet punkt i vejens tværsnit, i reglen et punkt på færdigvejsoverfladen. På almindelige veje med én kørebane vil det ofte være vejoverfladens midterlinje. Hvis vejen har en midterrabat, er midterlinjen ikke hensigtsmæssig at anvende; i stedet anvendes i reglen en af kørebanekanterne nærmest midterrabatten.

Tracéen beskrives ved linjeføringen og ved længdeprofilet.

Linjeføringen er den horisontale projektion af tracéen, jævnfør Figur 9.

Længdeprofilet er tracéens afbildning på **længdesnitplanen**, dvs. på den plane udfoldning af den cylinder, hvis frembringer er lodret, og hvis ledekurve er tracéen.

Længdeprofilreferencen er det punkt i færdigvejsoverfladen, hvortil vejens længdeprofil refererer. Det vil i reglen være vejoverfladens midtlinje. Ofte fremstilles længdeprofilet tillige for vejens kørebanekanter, således at overhøjden fremgår.

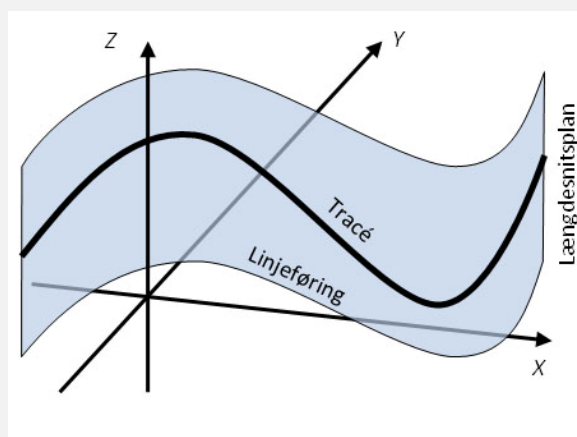
Overhøjden er den forøgelse af koteforskellen mellem kørebanekanterne, som skyldes, at sidehældningen ændres ved overgang fra retlinet strækning til kurve.

Linjeføringen opbygges af **linjeføringselementer**, dvs. geometriske elementer i form af linjestykker, cirkelbuer og overgangskurver. Forløbet kan afbildes skematisk på et **kurvebånd**, der viser krumningen i det enkelte punkt, jævnfør Figur 10.

Længdeprofilet opbygges af **længdeprofilelementer**, dvs. geometriske elementer i form af linjestykker og vertikalkurver.

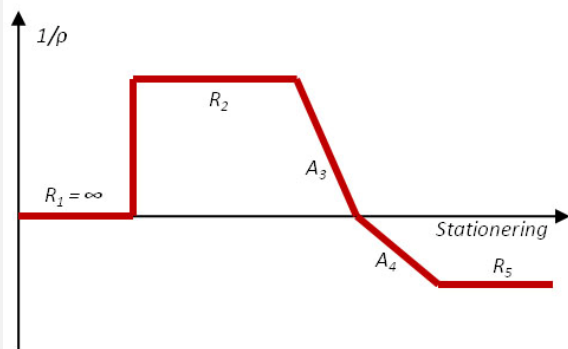
Linjeføringselementer og længdeprofilelementer betegnes under ét **tracéringselementer**.

Tangentpunkter er punkter, hvor to linjeføringselementer eller to længdeprofilelementer støder sammen, uden retningsændring.



Figur 9. Vejens tracé fastlægger linjeføringen og længdesnitplanen i det overordnede XYZ-kordinatsystem. Længdeprofilet fremkommer ved at udfolde længdesnitplanen.

Figur 10. Kurvebåndet er en skematisk fremstilling af linjeføringen. Båndet viser krumningen, dvs. den reciproke værdi af krumningsradius, p , i det enkelte punkt. Eksemplet viser en ret linje, der går direkte over i en cirkelbue; herefter følger en vendeklothoide, hvis grene har forskellig klothoidparameter, før den afsluttende cirkelbue.



Stationering

Når tracéen er fastlagt, kan ethvert punkt i vejen angives ved stationen til det tværsnit, der indeholder punktet, og ved punktets placering i tværsnittet.

Stationen er et længdeangivet punkt på linjeføringen. Længden er målt i langs linjeføringen fra et givet nulpunkt. Nulpunktet fastlægges ofte i en anden vejs center- eller stationeringslinje.¹

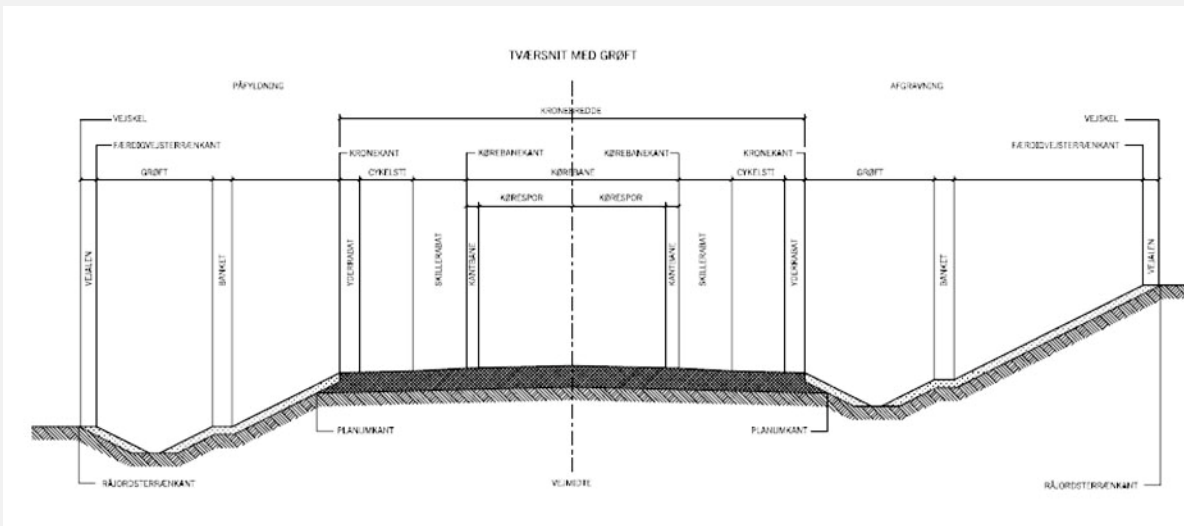
Den retningsbestemte linjeføring med angivelse af et nulpunkt betegnes **stationeringslinjen**.

Stationsintervallet er afstanden mellem stationer, der beregnes.

Tværsnit og tværprofil

En **tværsnitsplan** er en vertikalt plan gennem et givent punkt på tracéen og vinkelret på linjeføringen.

Tværsnittet, se Figur 11, er vejkonstruktionens skæring med en tværsnitsplan. Tværsnittet rummer flere tværprofiler.



Figur 11. Eksempel på normaltværsnit for en to-sporet vej med grøfteafvanding. Tværsnit viser vejens tværprofiler, dvs. overfladers skæring med de lodrette planer, der gennem ethvert punkt af tracéet står vinkelret på linjeføringen. Normaltværsnittet viser den principielle opbygning, hvor vejens Z-koordinat ikke er lagt fast i forhold til terrænets kote, og hvor der ikke er taget hensyn til eventuel overhøjde i horisontalkurver. (31)

¹ Bemærk, at stationeringen *ikke* er et synonym for den kilometrering, der anvendes i vejforvaltningssystemer, og som eventuelt er angivet på kantpæle langs vejen.

Tværsnittet er en flades skæringskurve med en tværsnitsplan. Ofte vil det være underforstået at der tales om enten **færdigvejstværsnittet**, dvs. færdigvejsoverfladens skæring med en tværsnitsplan, eller **råjordstværsnittet**, dvs. skæringen mellem en tværsnitsplan og overfladen af det udgravede eller opfyldte jordanlæg.

Et **tværsnittelement** er et linje- eller kurvestykke, der indgår i tværsnittet.

Vejens tværsnit bestemmes med udgangspunkt i **normaltværsnittet**. Normaltværsnittet definerer med målangivelser tværsnittene af færdigvejs- og råjordsoverfladen samt eventuelt overbygningens konstruktion der for en ensartet strækning af vejen. Det aktuelle tværsnit i den enkelte station tilpasses ud fra normaltværsnittet, navnlig vedrørende fastlæggelse af overhøjde ud fra kørselsdynamiske hensyn samt vedrørende indpasning af skråninger og afvandingskonstruktioner i forhold til terrænet.

Vejkoordinater

En **tværsnitsberegning** indebærer bestemmelse af koordinaterne (XYZ) til tværsnittenes knæpunkter i alle ønskede stationer, herunder alle tangentialpunkter, i vejanlægget. (31)

De koordinater (XYZ), der søges, udtrykker punkternes beliggenhed i det overordnede koordinatsystem, der anvendes. Det er i reglen¹ et koordinatsystem, hvor X -aksen peger mod øst (Easting) og Y -aksen peger mod nord (Northing).

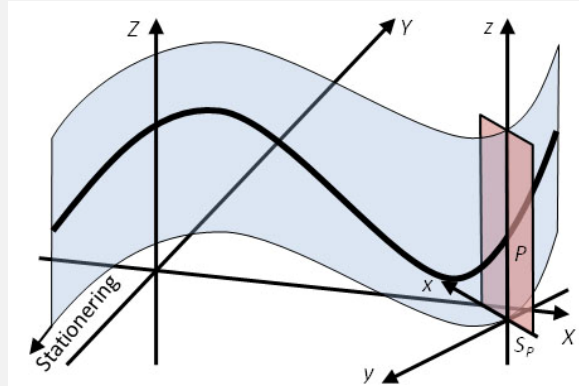
Forudsætningerne for at gennemføre en tværsnitsberegning er, for det første at der er foretaget en **linjeberegning**, dvs. en beregning, der på grundlag af kendskab til linjeføringens tvangspunkter og dens opbygning af linjeføringslementer som resultat giver plankoordinater til stationeringslinjen. Forudsætningerne er for det andet, at der er foretaget en tilsvarende **længdeprofilberegning**, og for det tredje, at tværsnitselementerne er fastlagt i de enkelte stationers tværsnit.

Oftest vil linjeføringen og længdeprofilet være gennemregnet flere gange, før den første tværsnitsberegning sættes i værk. Det skyldes, at vejens kørselstekniske og æstetiske kvaliteter i væsentligt omfang fastlægges allerede i samspillet mellem linjeføring og længdeprofil og disses placering i forhold til terrænet.

Vejkoordinatsystemet

Ved tværsnitsberegningen benyttes vejkoordinatsystemet (xyz). **Vejkoordinatsystemet** fastlægges, jævnfør Figur 12, for hvert punkt på tracéen.

Figur 12. Vejkoordinatsystemet i punktet P med stationering S_p har sin y -akse i stationeringslinjens tangentretning gennem punktet. Tværsnitsplanet udspringer af x - og z -akserne.



¹ Bemærk, at mange danske vejanlæg er beregnet i forhold til »Den danske Kortprojektion«, System 34. Systemet var fastlagt med X -aksen mod vest og med Y -aksen mod Nord, og således at den trigonometriske station nr. 293 Agri Bavnehøj havde koordinaterne (200.000,200.000). På Bornholm anvendtes en tilsvarende defineret kortprojektion, System 45.

Systemet har sit begyndelsespunkt (origo) på linjeføringen. x -aksen ligger vandret i tværsnitsplanen og er positiv til højre set i stationeringsretningen. y -aksen ligger i horisontalplanen som tangent til stationeringslinjen og er positiv i stationeringsretningen. z -aksen (koteaksen) er lodret og positiv opad. (31)

Den enkelte stations tværsnit ligger således i vejkoordinatsystemets xz -plan. Det betyder, at tværsnitselementernes koordinater i vejkoordinatsystemet er forholdsvis enkle at bestemme.

Koordinattransformation

Linjeberegningen giver kendskab til XY -koordinaterne af stationeringslinjen og dermed til begyndelsespunktet for vejkoordinatsystemet i den enkelte station.

Linjeberegningen giver endvidere kendskab til vinkeldrejningen mellem de to koordinatsystemer (det overordnede XY -koordinatsystem og vejkoordinatsystemet) i det enkelte stationeringspunkt.

På det grundlag kan man i enhver given station finde XY -koordinaterne til ethvert kendt punkt P i tværsnitsplanen, dvs. i vejkoordinatsystemets xz -plan. Det sker ved en simpel koordinattransformation.

Da Z - og z -akserne er parallelle, gælder:

$$[1] \quad Z_P = z_P + C_Z$$

hvor: C_Z er en konstant, der angiver forskellen mellem nul-niveauet i de to koordinatsystemer.

Hele koordinattransformationen er således reduceret til at bestå af denne vertikale forskydning samt af en sammensat drejning og parallelforskydning i det horisontale plan, jævnfør Figur 13:

$$[2] \quad \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_O & -\sin\theta_O \\ \sin\theta_O & \cos\theta_O \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$

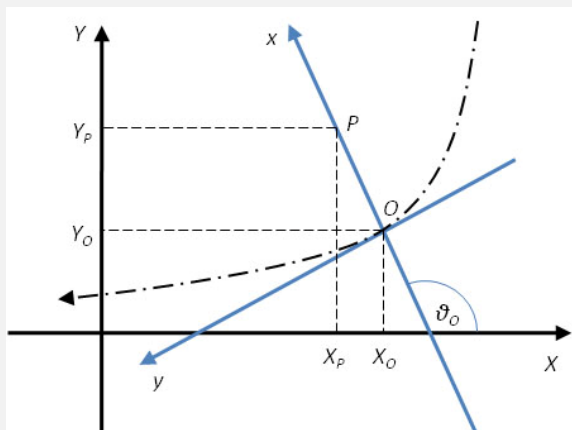
hvor: (X_O, Y_O) er XY -koordinaterne til det aktuelle vejkoordinatssystems origo, O (stationeringspunktet)

θ_O er vinkeldrejningen fra X -aksen til x -aksen, målt i positiv omløbsretning

Det er forudsat, at de to koordinatsystemer er orienteret ens, og at de har samme målestoksforhold.

Den modsatte transformation, fra XY - til xy -koordinater, følger formelen:

$$[3] \quad \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_O & \sin\theta_O \\ -\sin\theta_O & \cos\theta_O \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_P - X_O \\ Y_P - Y_O \end{bmatrix}$$



Figur 13. Koordinattransformation af punktet P i tværsnitsplanen til linjeføringens station S fra vejkoordinatsystemet til det overordnede XY -koordinatsystem.

Hastighedsbegreber

Hastigheden som udformningsparameter

Hastigheden er den centrale parameter i vejprojekteringen. Den adskiller sig på nogle punkter fra de øvrige. Dels fastlægges den ønskede hastighed i vej- og trafikplanlægningen, og er således givet »udefra«. Dels spiller hastigheden ind i hovedparten af de vejgeometriske og kørselsdynamiske modeller, jævnfør Figur 6. En ændring af hastigheden betyder derfor en ændring af næsten alle grænseværdier for tracéringselementerne.

Hertil kommer, at trafikanterne ikke alle kører med samme hastighed. Dels gælder der, jævnfør § 42 i færdselsloven (32), forskellige generelle hastighedsgrænser for lette og for tunge køretøjer. Dels er der en spredning over det hastighedsvalg, de individuelle trafikanter træffer.

Det er ønskeligt at tage højde for de trafiksikkerhedsmæssige (men ikke de komfortmæssige) følger af, at en del trafikanter kører hurtigere, end det er ønsket eller tilladt. Dette må imidlertid ske på en måde, der ikke frister trafikanterne til at køre endnu hurtigere.

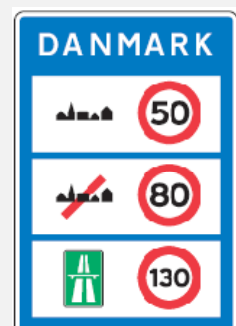
Hastigheds-dilemmaet

Dilemmaet er, at vejens udformning, skal respektere den hastighed, som man skal kunne køre på vejen med. Hastigheden, der er valgt, afspejler sig i vejens tracé og oversigtsforhold. Udgangspunktet er, at udformningen skal tilfredsstille de kørselsdynamiske og geometriske krav for alle, også de der kun lige netop lever op til det forudsatte. Vejen skal altså have en vis minimumsstandard, der er baseret på *worst case* antagelser om trafikanten og/eller om køretøjet.

Den enkelte trafikant har imidlertid sin individuelle bedømmelse af sin egen og af sit køretøjs formåen. Denne vil ofte være gunstigere end den *worst case*, der er anvendt ved vejudformningen. Trafikanten kan derfor tolke det visuelle indtryk, som vejen giver, således at vejen har en højere standard, og dermed indbyder til en højere hastighed, end den, der er tilstræbt. Dette gælder uanset eventuelle hastighedsbegrænsninger. En del af trafikanterne vil derfor køre hurtigere end det forudsatte.

Tilsidesættelse af en hastighedsbegrænsning er selvfølgelig aldrig lovligt. Man kan derfor påstå, at de trafikanter, der overskrider hastighedsbegrænsningen, blot må tage skade for hjemgæld, hvis de kommer i uføre. Der er imidlertid to hager ved en sådan betragtning. Dels harmonerer den dårligt med et erklæret mål om, at vejene skal udformes, så de er »tilgivende«. Dels kan en ulykke involvere en sagesløs tredjemand, der færdes helt efter bogen.

Det nytter selvfølgelig ikke, at blot udforme vejen, så *worst case* antagelsen kommer til at gælde den øgede hastighed, de hurtigkørende trafikanter anvender. Det vil blot give indtryk af en endnu højere vejstandard og vil dermed være et incitament til at køre (endnu) hurtigere.



Figur 14. Oplysningstavlen E 80, Generelle hastighedsbegrænsninger. Tavlen angiver de generelle hastighedsbegrænsninger, som gælder i landet. På undertavle kan oplyses om yderligere regler, som er af vigtighed ved færdsel i landet, f.eks. regler for anvendelse af køreløse og sikkerhedsseler. Fra (33).

Kunststykket er derfor, at indbygge sikkerhed, navnlig i forhold til tredjepart, uden samtidig at friste til at øge hastigheden. Dette er i praksis lettere sagt end gjort.¹

Det er selvfølgelig trafikantens ansvar at færdslen foregår forsvarligt, herunder at de selv har de nødvendige forudsætninger, at køretøjet er i forskriftsmæssig stand, og at de agerer selv i overensstemmelse med færdselslovens bestemmelser og afpasser hastigheden efter forholdene, jævnfør færdselslovens § 41 stk. 1.²

Vejmyndighederne har imidlertid et ansvar for, at de sammenhænge, der følger af de forudsatte fysiske forudsætninger og af de kørselsdynamiske og geometriske modeller, er tilgodeset. Hvor dette ikke umiddelbart er indfriet, kan det hævdes, at vejmyndighederne har et medansvar for, at der på vejen træffes de foranstaltninger, der er nødvendige, for at trafikanterne afpasser adfærden efter de faktiske forhold.

Generelle hastighedsgrænser

Denne problematik blev yderligere aktuel, da der blev indført generelle hastighedsgrænser i Danmark. Det skete i forbindelse med energikrisen i 1973, og målet med de generelle hastighedsgrænser var at undgå et energiøkonomisk spild som følge af (for) høje hastigheder.³

Ved at vælge en strategi med generelle hastighedsgrænser, er der risiko for, at nogle trafikanter tolker fravær af en lokal hastighedsbegrænsning som en tilkendegivelse af, at vejens geometriske standard lever op til, at det er fuldt forsvarligt at færdes med den hastighed, som den generelle hastighedsgrænse angiver.⁴

Endnu synes de fleste trafikanter dog fortsat at have en forståelse for, at når vejr- og føreforhold, fx tåge og kraftigt snefald tilsiger det, skal hastigheden afpasses til et lavere niveau end hastighedsbegrænsningen.

Hastighedskoncept

Det værktøj, som vejregler benytter til at håndtere dilemmaet og problematikkerne, der er knyttet til valget af vejens hastighed, kan kaldes et hastighedskoncept.

Et hastighedskonceptet består af en hastighedsmodel, der »oversætter« den planlagte, ønskede eller tilladte hastighed for vejstrækningen til en parameter, som anvendes til at fastlægge størrelsen af blandt andet tracéringselementerne, der skal benyttes.

Hastighedskonceptet fastlægger endvidere en række af de fysiske forudsætninger for de kørselsdynamiske og vejgeometriske modeller. Herigennem repræsenterer valget af hastighedskoncept et valg af, hvordan der på en standardiseret vis indbygges et passende mål af sikkerhed i vejudformningen.

Hastighedskonceptet ligger til grund for de sammenhørende værdier i de respektive vejregler.

¹ Foranstående beskrivelse har ganske negligeret den betydning, som vejrforholdene, herunder føret, har. Det gælder såvel i forhold til trafikanternes hastighedsvalg, som i forhold til hvad man skal betragte som *worst case*.

² § 41. Et køretøjs hastighed skal til enhver tid være afpasset efter forholdene med særligt hensyn til andres sikkerhed. Den kørende skal herved tage vej-, vejr- og sigtforholdene, køretøjets tilstand og belæsning samt færdselsforholdene i øvrigt i betragtning. Hastigheden må aldrig blive større, end at føreren bevarer fuldt herredømme over køretøjet. Der skal kunne standes på den strækning af kørebanen foran køretøjet, som føreren har udsyn over, og foran enhver hindring, der kan påregnes. Ved nedblænding fra fjernlys (langt lys) til nærllys (kort lys) skal hastigheden før nedblændingen tilpasses de nye sigtforhold. (31).

³ De oprindelige, generelle hastighedsgrænser er senere ændret. I bymæssig bebyggelse blev grænsen i 19XX sænket fra 60 km/h til 50 km/h med begrundelse i trafiksikkerhed. På motorveje blev grænsen i 19XX hævet fra 80 km/h til 110 km/h, og i 20XX til 130 km/h.

⁴ Sverige anvender en anden strategi, nemlig konsekvent skiltning af aktuelle hastighedsbegrænsninger; oprindeligt med hastighedsspring på 20 km/h (110 – 90 – 70 – 50 – 30), men efterhånden med en differentiering på 10 km/h og med forvarsling af hastighedsnedsættelser.

Det er væsentligt at forstå, at man ved vejudformningen, herunder valg af tracéringselementer, skal være loyal over for det hastighedskoncept, man har valgt at anvende.

Blander man hastighedskoncepterne og vælger at arbejde med et miks af ældre og nyere, danske eller udenlandske parametre, får man et resultat, der er uforudsigeligt. I bedste fald får man en utilsigtet standardforbedring, eventuelt mod en unødvendig meromkostning. I værste fald fjerner man sikkerhed, som trafikanterne i deres adfærd har vænnet sig til at tage for givet.

Tilsvarende gælder, hvis man finder anledning til at ændre den værdi, en konkret parameter tillægges i konceptet. Ændres værdien af én parameter, så kan det have betydning for størrelsen af andre parametre. Og under alle omstændigheder, så ændres den geometriske standard, som vejene får.

En ændret geometrisk standard har selvfølgelig en direkte afledt økonomisk konsekvens ved anlæg og ombygning af vejene. Samtidig betyder en ændret geometrisk standard, at der stilles ændrede krav og forventninger til køretøjernes og trafikanternes formåen. Dette har en lige så selvfølgelig, umiddelbar, men sjældent let gennemskuelig, konsekvens for trafikafviklingen og for trafiksikkerheden.

En generelt forudsat hovedregel for at opnå glidende og sikker afvikling af trafikken er, at vej- og trafikbilledet skal være forudsigeligt og genkendeligt for trafikanterne – vejene skal være »selvforklarende«. Herved kan trafikanterne nemlig udnytte den kørselsrutine, de har oparbejdet.

I konsekvens heraf er der en naturlig konservatisme knyttet til en gang fastsatte værdier af de fysiske forudsætninger. Det betyder ikke, at man skal afholde sig fra at inddrage nyeste, dokumenterede viden. Men man bør ikke justere værdierne, uden at have analyseret og vurderet de afledte konsekvenser.

Danske vejreglers hastighedsbegreber

Hastigheden betegnes normalt med bogstavet v [m/s] eller V [km/h]. Om talværdierne gælder:

$$[4] \quad |V| = 3,6 \cdot |v|$$

Hastighedsfaktor

De senest godkendte danske vejregler for tracéring i de åbne land, 1943-vejreglerne, (34), anfører: *Det første Krav til en Vejs Linieføring, Længdeprofil, Tværprofil, Oversigt, Udstyr m. v. maa være, at Færdselssikkerheden er saa stor som muligt, hvilket navnlig betyder, at der forud for Projekteringen maa fastslaaes en bestemt største hastighed, i det følgende kaldt Hastighedsfaktoren, der fastlægges til Grund for Vejens Udbygning, ligesom der maa skaffes Oplysninger om forekommende og forventede Færdselsmængder.*

Der gives følgende definition: *Ved Hastighedsfaktor forstaas den Maksimalhastighed, som en Vej under gunstige Vejr- og Trafikforhold vil kunne befares med.* I tilknytning hertil bemærker 1943-vejreglerne: *Hastighedsfaktoren er en teoretisk Talstørrelse, der udtrykker den Hastighed, som Vejens Udbygning og Udstyr kan tillade, at Vejen befares med, og den maa naturligt ligge over den i nugældende Lovgivning anførte Maksimalhastighed, fordi denne er fastsat ogsaa udfra andre hensyn, bl. a. Motorkøretøjernes Konstruktion, og fordi fremtidig Lovgivning kan sætte denne Maksimalhastighed op.*

Tabel 1. Hastighedsfaktorer i henhold til de danske vejregler fra 1943. (34). Købstads- og sognekommunerne stod for bivejene; amterne for landevejene. Andre væsentlige landeveje er de, »der uden at være hovedveje danner forbindelse mellem købstæder eller mellem disse og hovedveje, eller landeveje som i trafikal betydning må ligestilles hermed«. Staten administrerede ikke offentlige veje.

Vejklasse	Hastighedsfaktor km/h
Landeveje, der er afmærket som hovedveje	100
Andre væsentlige landeveje	80
Øvrige landeveje	70
Biveje, der er af større betydning	50
Øvrige biveje	40

Tabel 2. Dimensioneringshastighed i henhold til de danske udkast vejregler fra 1964. (12). Hovedlandeveje er veje, som staten (Vejdirektoratet) administrerer. Amterne administrerede landevejene, mens købstæderne og sognekommunerne administrerede de offentlige biveje.

Vejklasse	Dimensioneringshastighed km/h
Motorveje	120
Øvrige hovedlandeveje	100
Landeveje af 1. klasse	90
Landeveje af 2. klasse	80
Landeveje af 3. klasse	80
Biveje af 1. klasse	60
Biveje af 2. klasse	50

Hastighedsfaktorerne knyttes til den nedarvede, funktionelle, administrative vejklassificering, jævnfør Tabel 1. 1943-vejreglerne angiver dog: *I bebyggede Omraader skal der principielt regnes med ovenstaaende Hastighedsfaktorer, idet disse dog kan reduceres i det Omfang, som de stedlige Forhold maatte gøre det rimeligt.*

Endvidere anføres: *Vej, der kan forventes oprykket i en højere Klasse, udbygges efter de til denne højere Klasse svarende regler.*

1943-vejreglerne fastsætter afledte tracéringsparametre mv. i forhold til hastighedsfaktorerne.

Dimensionerende hastighed

Udkast til vejregler

Udkast til vejregler fra 1960 (11), og den senere udgave med enkelte rettelser fra 1964 (12), begrundet og beskriver ikke sit hastighedskoncept.

Det gennemgående hastighedsbegreb er dimensioneringshastigheden, der knyttes til den funktionelle, administrative vejklassificering, jævnfør Tabel 2. Udkastene angiver blot: *Vejene skal dimensioneres for følgende hastigheder.* Det anføres dog: *Biveje af 1. klasse kan, hvor forholdene gør det ønskeligt, dimensioneres for en hastighed af 80 km/time.*

Endelig gentager udkastene 1943-reglernes undtagelsesbestemmelser om veje i bebyggede områder og om veje, der kan forventes oprykket i en højere vejklasse.

Udkastene til vejregler fastsætter afledte tracéringsparametre i forhold til vejklasseinddelingen; enkelte parametre fastsættes i forhold til dimensioneringshastigheden. Ved fastlæggelsen af de enkelte parametre kan der indgå et sikkerhedstillæg.

Motorvejsregler

Motorvejsreglerne (13) anvender, ligesom udkast til vejregler, dimensioneringshastigheden. Det er dimensioneringshastigheden, øvrige tracéringslementer er knyttet op på. Værdierne viser, jævnfør Tabel 3, at der i perioden 1964-71 skete en opjustering af dimensioneringshastigheden.

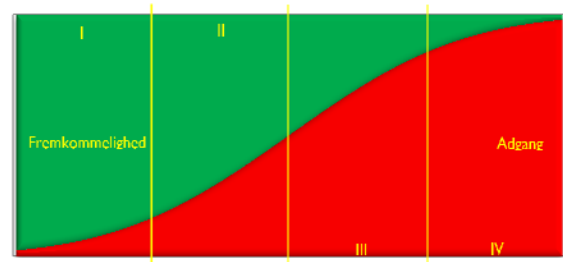
Typekatalog

Blandt de nyere danske vejregler er der til dato kun udsendt én endeligt godkendt vejregel, der beskæftiger sig med centrale vejgeometriske parametre uden for bymæssige områder, nemlig *Typekatalog for veje og stier i åbent land*, (35). Typekataloget er i forhold til den praktiske brug overhalet af senere vejregelforslag; men typekataloget markerer på flere måder et væsentligt skel.

Tabel 3. Dimensioneringshastighed fastlagt af vejregeludvalget og gældende i 1971. I henhold til motorvejsreglerne (13).

Vejklasse	Dimensioneringshastighed km/h
Motorveje	120
Øvrige hovedlandeveje og landevej af 1. klasse	100
Øvrige landeveje og betydelige biveje	80
Øvrige biveje	60

Figur 15. Vejtypekatalogets funktionelle klassifikation har fire klasser: I – veje der indgår i det internationale vejnet eller forbinder landsdele og landsdelscentre, II – veje, der forbinder regionalcentre og som sammen med vejklasse I udgør et landsdækkende vejnet med rimelig sammenhæng og maskevidde, III – veje, der giver landets enkelte kommuner forbindelse til det landsdækkende vejnet, samt IV – lokale vejforbindelser, såvel kommunale som private. (35)



Selve typekataloget rummer oplysninger om tværprofilerne, men angiver alene oplysninger om tværprofilelementernes bredde, ikke om deres sidehældning, skråningsudformning, afvandingskonstruktion eller andet, der beskriver normalt tværprofilets fulde geometri. Derimod angiver typekataloget sammenhængen mellem tværprofilet og den valgte dimensioneringshastighed.

Nøglebegrebet er den funktionelle vejklassificering, som typekataloget introducerer i vejreglerne. Baggrunden var, at de ændringer af vejbestyrelsesforholdene, der skete i tilknytning til kommunalreformen omkring 1970, gjorde det naturligt at koble vejreglerne af den administrative vejklassificering. Staten, dvs. Vejdirektoratet, havde overtaget en række landeveje, som tilgodeså de landsdækkende forbindelser, og som derfor burde administreres og finansieres centralt, men som ikke nødvendigvis burde gives en udformning, der adskilte sig fra de omkringliggende landeveje.

Den funktionelle vejklassificering, som typekataloget introducerer, er kun angivet indirekte i form af vejledende vejklassekarakteristika, såsom facadeforhold, krydsstandard og trafiksamensætning og -adskillelse.

Det grundlæggende udgangspunkt er, at veje har to trafikale funktioner, dels at tilvejebringe fremkommelighed ad vejen, dels at tilvejebringe adgang til de arealer, vejene gennemløber. Disse hensyn er modstridende, og man kan ikke tilgodese et ene uden at det sker på bekostning af det andet. Typekataloget opererer derfor med fire funktionelle vejklasser, hvor klasse I er de overordnede veje, der især skal tilgodese fremkommeligheden, og klasse IV er de lokale vejforbindelser, der forsyner lokalsamfundene med adgang til vejnettet, jævnfør Figur 15.

Typekataloget knytter valg af funktionel vejklasse til en vifte af vejtyper i form af tværprofiler sammensat af tværprofilelementer. For hver kombination angiver kataloget et interval for dimensioneringshastigheden. Herved bliver valget af dimensioneringshastighed en skalaparameter, der påvirker valget af de øvrige tracéeringsparametre.

Ønsket hastighed

I de seneste danske vejregler for udformning af byernes trafikarealer, (28)(10), og i de seneste udkast til nye danske vejregler for udformning af veje og stier i det åbne land, (14)(15), indgår et andet hastighedskoncept. Konceptet tager udgangspunkt i den ønskede hastighed, V_0 , og opererer herudover med den hastighed, som 85 %-fraktilen af trafikanterne anvender, $V_{85\%}$.

Konceptet genfindes i de tyske projekteringsregler fra 1973 (36) og fra 1995 (37).

Den ønskede hastighed

Den ønskede hastighed, V_0 , fastlægges af vejbestyrelsen som den hastighed, som man af hensyn til trafiksikkerheden og miljøet ønsker, at førere af personbiler overholder. Den ønskede hastighed må ikke overstige den gældende hastighedsbegrænsning på vejen.

Den ønskede hastighed lægges til grund for planlægning og projektering af de enkelte vejstrækninger. Ved projekteringen er det en opgave at sikre, at trafikanterne under normale vej- og føreforhold kan køre sikkert og komfortabelt ved den ønskede hastighed, samtidig med at trafi-

kanterne ved visuelle og fysiske virkemidler så vidt muligt påvirkes til højst at køre med den ønskede hastighed.

Vejtracéets kurver og den sideacceleration, som dette giver, er de væsentligste fysiske virkemidler til at få den ønskede hastighed overholdt. Andre fysiske virkemidler kan være rumlestribes, forsætninger og bump. Af visuelle virkemidler kan nævnes skiltet hastighed, den visuelle bredde af kørespor og vejrummets lukkethed. Herudover er synlig overvågning, herunder politiets tilstedeværelse, af betydning for den adfærd, trafikanterne udviser.

85 % fraktil-hastigheden

Ikke alle trafikanter kører imidlertid samme hastighed, og desværre overholder ikke alle den generelle eller skilte hastighedsgrænse. De danske vejregler (14) anfører, at målinger udført i 1997 og 1998 har vist, at på veje i åbent land med hastighedsgrænse på 60 km/h eller derover, overskrider 15 % af personbilerne en hastighed, der er 20 km/h højere end hastighedsgrænsen.¹

Derfor dimensioneres vejene på grundlag af en hastighed, der indbygger en vis sikkerhed i forhold til de kørselsdynamiske modeller, som har betydning for trafiksikkerheden.

Bemærk, at de danske vejregelforslags hastighedstillæg kun anvendes ved fastlæggelsen af de tracéringselementer, der er sikkerhedsbetingede, mens de tracéringselementer der er komfort-baserede udformes på grundlag af den ønskede hastighed uden hastighedstillæg.

Hastigheden ved valg af tracéringsværdier

Det danske vejregelforslag for veje og stier i åbent land, (14)(15), fastsætter, at dimensionering sker på grundlag af $V_{85\%}$, dvs. den hastighed, som 85 % af trafikanterne ikke overskrider i vådt føre.

Ved nyanlæg fastlægges nogle tracéringsværdier således ud fra den ønskede hastighed, V_0 , mens der for en række værdier, som har betydning for trafiksikkerheden, jævnfør Tabel 4, gives et hastighedstillæg til bestemmelse af $V_{85\%}$:

$$[5] \quad V_{85\%} = V_0 + 20 \quad \text{km/h}$$

Vejregelforslaget anfører, at tilpasninger af eksisterende veje dimensioneres på grundlag af den målte værdi for $V_{85\%}$. Hvis denne er større end den ønskede hastighed, bør der skabes overensstemmelse mellem den faktiske og den ønskede hastighed. Det kan ske ved ombygning eller ved tavleafmærkning – ved overvejelser om specielt ombygning anfører vejregelforslaget, at studier af uheldsbilledet dog bør veje nok så tungt som hastighedsmålinger.

	Beregningsgrundlag
Traceringsværdi	↓
Standselængde	$V_{85\%}$
Horisontalkurveradius bestemt af stopsigt over rabat på 2 m eller 1,5 m	$V_{85\%}$
Horisontalkurveradius bestemt af stopsigt langs kø	$V_{85\%}$
Vertikalkurveradius bestemt af stopsigt	$V_{85\%}$
Mødesigtelængde	V_0
Horisontalkurveradius bestemt af mødesigt over rabat på 2 m eller 1,5 m	V_0
Vertikalkurveradius bestemt af mødesigt	V_0
Overhalingssigt	V_0
Horisontalkurveradius bestemt af overhalingssigt over 4 m rabat	V_0
Vertikalkurveradius bestemt af overhalingssigt	V_0
Horisontalkurveradius bestemt af kørselsdynamik ved 70 % sidefald	V_0
Vertikalkurveradius bestemt af komfort	V_0

Tabel 4. Anvendelsen af V_{85} henholdsvis V_0 ved beregning af sigt og af mindsteradier i horisontal- og vertikal-kurver.(15).

¹ Vejreglerne angiver desværre ikke kilden til disse målinger.

Andre danske hastighedsbegreber

Vej- og trafikteknisk ordbog (31) angiver følgende andre hastighedsbegreber til brug ved planlægning og projektering:

- middelhastighed V_m : Gennemsnitlig hastighed for alle køretøjer, der passerer et givet tværprofil i et givet tidsinterval.
- referencehastighed: Tidligere betegnelse for ønsket hastighed både i by- og landområder.
- rejsehastighed, V_R : Et køretøjs beregnede gennemsnitshastighed mellem to punkter, når eventuelle stop og forsinkelser i tilknytning til kørslen medregnes.
- strækningshastighed: Gennemsnitlig hastighed for alle køretøjer, der i et givet øjeblik kører over en given strækning.

Kræfter og energi

Kraftligevægt

I den klassiske fysiks idealiserede verden, vil et legeme, der ikke er udsat for resulterende kraft, bevæge sig med konstant hastighed. Der vil ikke optræde noget energitab under denne bevægelse.

Hvis der virker en resulterende kraft på legemet, vil legemet blive påvirket i kraftens retning. Den resulterende kraft kan opløses i en komponent, der er parallel med med øjeblikkelige hastighed, og en komponent, der er vinkelret herpå.

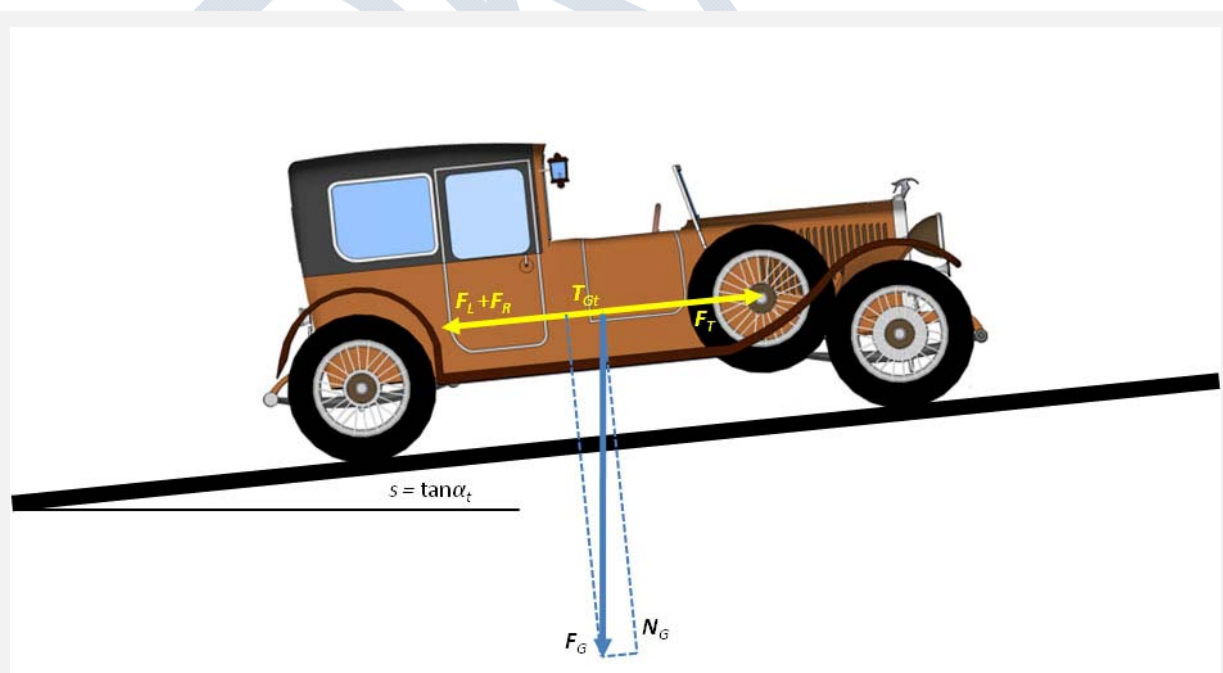
Den kraftkomponent, der er parallel med hastigheden, vil give anledning til en acceleration eller, hvis den virker rettet modsat hastigheden, til en deceleration. Den kraftkomponent, der er vinkelret på hastigheden, opleves om en sideacceleration, der giver anledning til, at køretøjet ændrer retning.

Det arbejde, der udføres, er produktet af den kraft, der virker, og den strækning, legemet bevæger sig.

Princippet om kræfternes ligevægt er den bærende betragtning i en lang række af vejgeometriens kørselsdynamiske modeller. De fleste af modellerne gør den tilnærmelse, at kræfterne regnes at virke i køretøjets tyngdepunkt.

De optrædende kræfter

Den virkelige verden er ikke ideel. Beskrivelsen af et køretøjs bevægelse må derfor rumme forenklinger og en række komponenter, der søger at give en fornuftig, tilnærmet fremstilling af den virkelige situation.



Figur 16. Kraftpåvirkningen på et køretøj i bevægelse på en retlinet bakkestrækning – ud over tyngdekraften, F_G , og dennes komponenter, N_G , og T_{Gt} , optræder motorens trækraft, F_T , samt luftmodstanden, F_L og rullemodstanden, F_R . Trækraften effektueres gennem tangentielle friktionskræfter, F_{Ft} , (ikke vist) i kontaktfladerne mellem dæk og vejoverfladen. I kontaktfladerne virker endvidere vejbefæstelsens normalkræfter, F_N , (ikke vist) som reaktion på de normale kraftkomponenter.

Den første forenkling består i, at man normalt betragter to simple situationer. Den første indebærer, at køretøjet bevæger sig retlinet, på en strækning, der ikke nødvendigvis vandret, men som ikke har tværfald. Den anden indebærer, at køretøjet bevæger sig vandret på en strækning, der ikke nødvendigvis er retlinet, og som kan have et tværfald. Situationerne er vist på Figur 16 henholdsvis Figur 17.

I Figur 16 befinder køretøjet sig på en vejstrækning med længdegradient, $s = \tan \alpha_t$, hvor α_t er vinklen mellem vejoverfladen og vandret i det lodrette tangentplan til bevægelsesretningen. Det svarer til, at køretøjet kører op eller ned ad en bakke på en retlinet vejstrækning.

I Figur 17 bevæger køretøjet sig gennem en vandret horisontalkurve med krumningsradius, r , og med et tværfald, en sidegradient, $i = \tan \alpha_r$, hvor α_r er vinklen mellem vejoverfalden og vandret i tværsnitsplanet.

At forenklingen ved at betragte de to simple situationer overhovedet er rimelig beror på, at såvel længde- som sidegradienten antager så små størrelser, at det er beregningsmæssigt acceptabelt at negligere deres gensidige påvirkning af en række af de indgående parametre. Situationen, hvor køretøjet bevæger sig op eller ned ad en bakke samtidig med at det gennemkører en kurve, håndteres derfor ved at se på kombinationen af kritiske parametre, navnlig det resulterende fald og den resulterende friktionskoefficient.

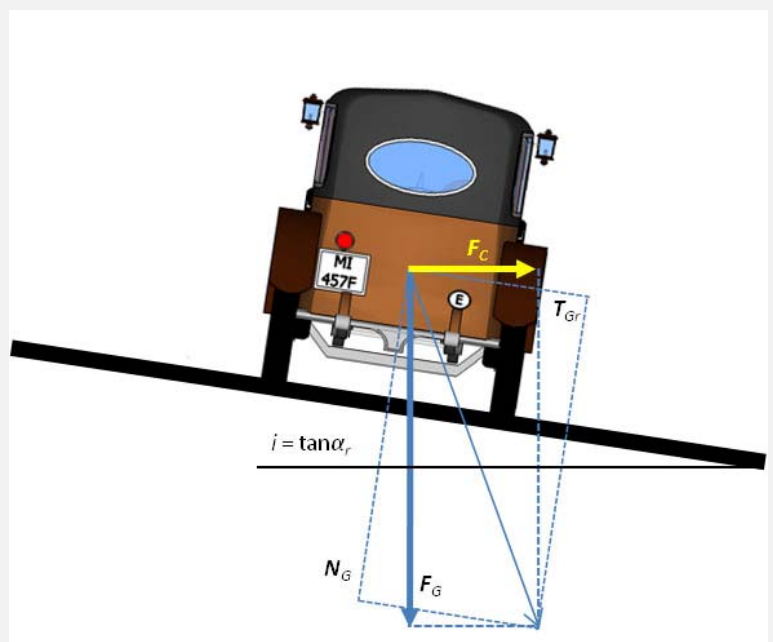
Såvel længdegradienten som sidegradienten angives i Danmark traditionelt i promiller, [‰]. I de kørselsdynamiske modeller¹ regnes længdegradienten, s , positiv ved stigninger og negativ ved fald. Sidegradienten, i , regnes positiv, når vejoverfladen falder ind mod horisontalkurvens centrum. På en retlinet vejstrækning, $R = \infty$, regnes sidegradienten positiv, når vejens midte ligger højere end køresporets højre side.

De otte kræfter, som indgår i de kørselsdynamiske modeller, der bruges i vejgeometrien, er tyngdekraften, centripetalkraften, vejbelægningens reaktionskraft, luftmodstanden, vindkraften, motorens trækraft, rullemodstanden samt friktionskraften.

Tyngdekraft

Tyngdekraften, F_G [N], er altid rettet lodret nedad, og den har størrelsen:

Figur 17. Kraftpåvirkningen på et køretøj i bevægelse gennem en vandret kurve – ud over tyngdekraften, F_G , og dennes komponenter, N_G og T_{Gr} , optræder centripetalkraften, F_C . Kurvebevægelsen effektueres gennem radiale friktionskræfter, F_{Fr} (ikke vist) i kontaktfladerne mellem dæk og vejoverfladen. I kontaktfladerne virker endvidere vejbefæstelsens normalkræfter, F_{Nv} (ikke vist) som reaktion på kræfternes normale kraftkomponenter.



¹ Bemærk, at fortegnene traditionelt defineres anderledes i forbindelse med linje- og længdeprofilberegninger..

$$[6] \quad F_G = M \cdot g$$

hvor M er køretøjets masse [kg],
 g er tyngdeaccelerationens størrelse; $g = 9,818 \text{ m/s}^2$ i Danmark.

Tyngdekraften opløses i tre indbyrdes vinkelrette komponenter; én komponent, N_G , som er normalkraft til (vinkelret på) vejoverfladen, og to, der er parallelle med vejoverfladen. Den ene af disse vejoverflade-parallele komponenter, T_{Gt} , følger tangenten til køretøjets bevægelsesretning, mens den anden, T_{Gr} , står vinkelret herpå og følger horisontalkurvens radius.

Størrelserne af de tre komponenter er:

$$\begin{aligned}
 N_G &= M \cdot g \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_t - \sin^2 \alpha_r} \\
 [7] \quad &= M \cdot g \cdot \cos \alpha_t \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_r}{\cos^2 \alpha_t}} \\
 &= M \cdot g \cdot \cos \alpha_r \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_t}{\cos^2 \alpha_r}}
 \end{aligned}$$

$$[8] \quad T_{Gt} = -M \cdot g \cdot \sin \alpha_t$$

$$[9] \quad T_{Gr} = +M \cdot g \cdot \sin \alpha_r$$

hvor normalkomponenten, N_G , regnes positiv »nedad«
den tangentielle kraftkomponent, T_{Gt} , regnes positiv fremad i bevægelsesretningen
den radiale kraftkomponent, T_{Gr} , regnes positiv »indad« mod kurvens centrum

Vejoverfladen er reelt rimelig vandret, og vinklerne α_t og α_r er derfor i praksis små. Det betyder, at deres cosinus-værdier er nær 1, og at sinusværdierne er nær 0. I formel [6] vil, i de to sidst anførte udtryk, værdien af størrelsen under kvadratrodstegnet derfor være meget nær 1.

Det betyder, at normalkraftens størrelse kan tilnærmes med $F_G \cdot \cos \alpha_t$, når kræfterne på langs ad vejen betragtes, og med $F_G \cdot \cos \alpha_r$, når kræfterne på tværs af vejen betragtes.

Centripetalkraft

Når et køretøj bevæger sig gennem en horisontalkurve, er det udsat for en sideacceleration, der er rettet mod kurvens krumningscentrum. Sideaccelerationen tilvejebringes dels af tyngdekraftens radiale komponent, T_{Gr} , dels af de friktionskræfter, der virker sideværts mellem køretøjets dæk og vejoverfladen.

Sideaccelerationen svarer til, at køretøjet udsættes for en centripetalkraft, F_C [N], der fastholder køretøjet i en cirkulær bevægelse om kurvens centrum. Hvis et legeme med massen M [kg] bevæger sig med farten¹ v [m/s] i en cirkelbue med radius R [m], har centripetalkraften størrelsen:

$$[10] \quad F_C = M \cdot \frac{v^2}{R}$$

Bemærk, at sideaccelerationen til tider relateres til en centrifugal kraft. Dette er imidlertid en indbildt kraft, som trafikanterne mener presser dem udad under kurvekørslen; det, trafikanterne faktisk er udsat for, er, at køretøjet accelereres ind mod kurvens centrum.

¹ Hastighed og fart er ikke synonymer; hastigheden er retningsbestemt, mens farten blot angiver hastighedens størrelse, dvs. at farten v udtrykker den numeriske værdi af hastighedsvektoren, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$: $v = |\mathbf{v}| \sqrt{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$.

Centripetalkraften kan, ligesom tyngdekraften, udtrykkes ved indbyrdes vinkelrette komponenter. Den tangentielle komponent, T_{ct} , er naturligvis 0, mens den de øvrige antager størrelserne:

$$[11] \quad N_c = M \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \sin \alpha_r$$

$$[12] \quad T_{Cr} = -M \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \cos \alpha_r$$

hvor normalkomponenten, N_c , kraften regnes positiv »nedad«
den radiale kraftkomponent, T_{Cr} , regnes positiv »indad« mod kurvens centrum

Vejoverfladens reaktionskraft

Vejbelægningen modvirker og udligner de kraftkomponenter, der er rettet vinkelret på vejoverfladen, med en lige så stor og modsat rettet reaktionskraft, F_N [N]. Reaktionskraften kan opfattes som en kompenserende kraft. Det betyder, at den antager netop den størrelse, der er nødvendig for at køretøjet ikke skal synke ned i vejbelægningen.

Reaktionskraften etableres i vejbefæstelsen, idet køretøjets tryk- og stødbelastning fra dækkene fordeles gennem vejbelægningens lag, så den enten optages i befæstelsen eller bæres af underbunden.

Det at sikre, at vejbefæstelsen kan levere den nødvendige reaktionskraft til at optage kræfternes resulterende normalkomponent, er en opgave, der håndteres gennem dimensioneringen af vejbelægningen. I forbindelse med de kørselsdynamiske modeller er det underforstået, at denne opgave er løst tilfredsstillende.

Vindkræfter

Vindkræfter negligeres normalt i de kørselsdynamiske modeller. Der ses altså i reglen bort fra påvirkningerne fra eventuel sidevind, F_{Vr} , samt med- og modvind, F_{Vt} .

Der er to undtagelser fra denne hovedregel. Den ene gælder selve luftmodstanden, jævnfør nedenfor.

Den anden undtagelse gælder særligt vindudsatte steder, hvor der kan optræde kritiske vindstød, der kan give risiko for, at navnlig »høje, lette køretøjer« vælter, jævnfør Figur 18. Situationen kan navnlig henføres til fritliggende brostrækninger over større vandområder, hvor vinden kan blæse frit; men den kan også optræde i ekstremssituationer fx under orkan. Situationen er kendt fra de varsler, som lejlighedsvis udsendes for på de store broer.

Figur 18. Høje, lette køretøjer er særligt udsatte for at vælte, hvis de påvirkedes af kraftig sidevind. Hvis kraftpåvirkningen på køretøjet er sammensat, så den resulterende kraft falder uden for det rektangel, som køretøjets hjul danner, vil kræfterne give anledning til et moment, som ikke kan modvirkes, og køretøjet vil vælte.

Foto: Ukendt.



Luftmodstand

Luftmodstanden, F_L [N], indregnes kun i én enkelt af vejgeometriens kørselsdynamiske modeller, nemlig ved bestemmelse af de hastighedsprofiler for tunge køretøjer, der benyttes til vurdering af behovet for et eventuelt krybespor. Luftmodstanden regnes, hvor den medtages, virkende modsat køretøjets bevægelsesretning og hæmmer altså den fortsatte bevægelse.

Luftmodstandens størrelse beror på komplicerede aerodynamiske forhold. Ved et motorkøretøjs bevægelse gennem atmosfærisk luft er *Reynolds tal*¹ imidlertid højt, og størrelsen af luftmodstanden kan derfor angives ved en simpel formel:

$$[13] \quad F_L = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_W \cdot A \cdot v^2$$

hvor ρ er luftens densitet [kg/m³]

C_W er en dimensionsløs størrelse [-], der afhænger af køretøjets form og overfladefriktion

A er køretøjets frontareal [m²]

Densiteten af atmosfærisk luft afhænger af temperaturen, luftfugtigheden og barometerstanden, og er altså ikke en konstant størrelse. Eksempelvis har tør luft ved havets overflade en densitet på 1,3 kg/m³ ved 0 °C og på 1,2 kg/m³ ved 20 °C.

Størrelsen C_W er køretøjsspecifik og er genstand for optimering fra bilfabrikanternes side. Personbiler har C_W -værdier i størrelsesordenen 0,3-0,5, mens trailere og lastbiler ligger på det dobbelte.

I et vejgeometrisk øjemed er udsvingene i luftens densitet og forskellene i bilmærkernes C_W -værdier uinteressant. I stedet fastsættes luftmodstanden i forhold til dimensionsgivende typekøretøjer, der repræsenterer et relevant segment af den pågældende del af bilparken, fx lastvogne eller sættevognstog. I denne sammenhæng erstattes leddene $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_W$ i udtryk [13] med en ny størrelse, typekøretøjets luftmodstandskoefficient C_L [kg/m³], således at formlen bliver:

$$[14] \quad F_L = -C_L \cdot A \cdot v^2$$

Trækkraft

Motorens trækkraft, F_T [N], indregnes ligeledes i den kørselsdynamiske model, der anvendes til at bedømme behovet for et eventuelt krybespor.

Motorens trækkraft overføres til køretøjets drivende hjul. Herved kommer den til at virke i kontaktfladerne mellem vejoverfladen og de drivende hjuls dæk. Den giver sig udtryk i vejoverfladeparallelle kræfter, der virker i køretøjets bevægelsesretning, og som normalt driver køretøjet fremad; men som ved motorbremsning kan være decelererende.

Trækkraften vurderes for typekøretøjer. Størrelsen afhænger af motorens effekt og af den aktuelle hastighed, v . Effekten opgives ofte som typekøretøjets motoreffekt pr. vægtenhed, dvs. som et relativt udtryk for motorens ydeevne i den situation, hvor køretøjet er fuldt læsset svarende til dimensioneringsforudsætningerne. Trækkraftens størrelse kan derfor udtrykkes:

$$[15] \quad F_T = \pm M \cdot \frac{P_T}{v}$$

hvor M er køretøjets masse [kg]

¹ Osborne Reynold (1842-1912), engelsk fysiker.

Reynolds tal, Re , er en dimensionsløs størrelse, der afhænger af det pågældende mediums strømningshastighed, densitet og viskositet samt af størrelsen af kontaktfladen til omgivelserne. Reynolds tal angiver om en strømning vil være laminar ($Re < 1$) eller turbulent ($Re > 1000$).

p_T er motoreffekten pr. vægtenhed [W/kg]

Ved nedbremsning i forbindelse med forudsigelige, naturlige hastighedstilpasninger, fx ved frakørsel fra en motorvej, antages trafikanterne i en vis udstrækning at betjene sig af motorbremsning.

Motorbremsningen kan beskrives ved en bagudrettet kraft, F_M [N]. Den kan ikke udtrykkes ved formelen [15], men regnes i reglen at have en konstant størrelse.

Rullemodstand

Rullemodstanden, F_R [N], er udtryk for det energitab, der altid sker i køretøjets hjullejer og transmissionssystem og i kontaktfladen mellem køretøjets rullende dæk og vejbelægningens overflade. Rullemodstanden virker altid modsat køretøjets bevægelsesretning.

Størrelsen af energitabet i kontaktfladen afhænger af den normalkraft, der overføres i kontaktfladerne, og af dækkets og vejoverfladens struktur og aktuelle materialeegenskaber. Denne del af rullemodstanden er således nært beslægtet med friktionskraften. Til tider behandles dette energitab ikke selvstændigt, men betragtes i stedet som en del af friktionskraften.

Størrelsen af energitabet i kontaktfladen kan udtrykkes:

$$[16] \quad F_R = -\mu_R \cdot F_N$$

hvor μ_R er en rullemodstands-koefficient [-]
 F_N er normalkraften, der overføres i kontaktfalden
 tangentielle kræfter er regnet positiv fremad i bevægelsesretningen

Størrelsesordenen af bidraget til rullemodstandskoefficienten, μ_R , er som angivet i Tabel 5.

Friktion

Friktionskraften, F_F [N] stammer ligeledes fra kontakten mellem køretøjets dæk og vejoverfladen.

Friktionskraften kan opfattes som en kompenserende kraft, der altid vil virke modsat kræfter, der er parallelle med vejoverfladen og søger at få dækkene til at glide på vejbelægningen; det kan være såvel accelererende eller decelererende kræfter som kræfter, der virker på tværs af bevægelsesretningen. At friktionskraften er kompenserende betyder, at den antager den størrelse og retning, der netop er nødvendig for at modvirke, at køretøjets dæk skrider. Bemærk, at denne måde at opfatte friktionskraften på, holder dog kun vand, hvis man betragter centrifugalkraften som en virkelig kraftpåvirkning af køretøjet.¹

Ved bremsning aktiveres supplerende friktion, idet køretøjets bremsesystem reducerer eller standser hjulenes rotationshastighed.

	Rullemodstandskoefficient	
	Vejklasse	μ_R
Tabel 5. Størrelsen af det bidrag, som kontakten mellem køretøjets dæk og vejoverfladen yder til rullemodstanden. KILDE	God asfalt	0,007
	Våd asfalt	0,015
	God beton	0,008
	Ujævn beton	0,011
	Stenbrolægning	0,017
	Ujævn, hullet, fast belægning	0,032
	Jord	0,15-0,94

¹ Reelt er centrifugalkraften, som nævnt, imaginær, og den centripetale acceleration tilvejebringes i en kombination af tyngdekraftens radiale komponent foranlediget af vejoverfladens tværfald og friktionskræfter, der aktiveres ved, at de styrende hjul ved kurvekørsel ikke er helt parallelle med kørselsretningens tangent.

Bemærk endvidere, at friktionskræfterne ikke nødvendigvis er ens i kontaktfladerne ved alle køretøjets dæk. For det første betyder køretøjets vægtfordeling, at der overføres forskellige tyngdekræfter gennem de forskellige aksler på køretøjet. Herudover virker motorkraften jo alene gennem de drivende hjul, og ved acceleration optræder der større friktionskræfter ved disses dæk end ved de øvrige. Ved bremsning aktiveres friktionskræfter i alle dæks kontaktflader. Ved kørsel i en horisontalkurve vil der i alle dæk være påvirkninger på tværs af bevægelsesretningen; men påvirkningerne i de styrende hjuls dæk vil tillige rumme et bidrag, der skyldes, at disse hjul er drejet en smule i forhold til den retlinede bevægelse.

Friktionskraftens størrelse er begrænset opad til dels af den normalkraft, der overføres i kontaktfladen, dels af friktionsegenskaberne mellem dækket og vejoverfladen. Begrænsningen kan udtrykkes:

$$[17] \quad F_F \leq -\mu \cdot F_N$$

hvor μ er den friktionskoefficient [-], der kan etableres i den aktuelle retning
 F_N er normalkraften, der overføres i kontaktfalden mellem dæk og vejoverflade

Friktionskraften opdeles, ligesom tyngdekraftens vejoverflade-parallele komponent, i en tangentiel og en radial komponent, F_{Ft} . De to komponenter virker parallelt med bevægelsesretningen, henholdsvis F_{Fr} virkende vinkelret herpå. Komponenterne følger således hovedakserne i den friktionsellipse, der begrænser den resulterende friktionskoefficient, jævnfør nedenfor.

Ligevægtsligninger

Kræfterne behandles i reglen som om de virker i køretøjets tyngdepunkt.

Strengt taget burde de normale og de parallelle kraftoverførsler mellem vejoverfladen og køretøjet betragtes for hvert enkelt dæk, idet det er her udvekslingen af kræfter mellem køretøjet og vejoverfladen finder sted. Ligeledes burde luftmodstanden betragtes i forhold til et karakteristisk angrebepunkt på køretøjets front.

Når kræfterne henføres til tyngdepunktet, betyder det, at der også optræder momenter. Momenterne kompenseres delvist af køretøjets affjedringssystem. Det bevirker, at dækkene påvirkes af kræfter, der ikke helt har samme størrelse. Formelt burde disse momenter medtages i de modeller, der anvendes; men i praksis kan der flere af de kørselsdynamiske modeller ses bort fra momenterne uden at dette får betydning.

Kræfternes ligevægtsligninger kan opstilles.

Normalkræfternes ligevægt

Ligevægt for kræfterne vinkelret på vejoverfladen, idet kræfterne regnes positivt »opad«:

$$[18] \quad \begin{aligned} 0 &= -F_N + N_G + N_C \\ &= -F_N + M \cdot g \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_t - \sin^2 \alpha_r} + M \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \sin \alpha_r \end{aligned}$$

Betragtes alene kræfterne i tracéets tangentielleplan, jævnfør Figur 16, kan udtrykket tilnærmes:

$$[19] \quad 0 \approx -F_N + M \cdot g \cdot \cos \alpha_t$$

Betragtes alene kræfterne i tværsnitsplanet, jævnfør Figur 17, kan udtrykket tilnærmes:

$$[20] \quad 0 \approx -F_N + M \cdot g \cdot \cos \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \sin \alpha_r$$

Tilnærmelsen i formel [19] og [20] anvendes normalt i modellerne for bakkekørsel henholdsvis kurvekørsel.

Tangentielle kræfters ligevægt

Ligevægt for kræfterne parallelt med vejoverfladen og i køretøjets bevægelsesretning giver, idet kræfterne regnes positivt i bevægelsesretningen:

$$\begin{aligned} [21] \quad 0 &= +M \cdot a + T_{Gt} + F_L + F_T + F_R \mp F_{Ft} \\ &= +M \cdot a - M \cdot g \cdot \sin \alpha_t + F_L + F_T + F_R \mp F_{Ft} \end{aligned}$$

hvor a er størrelsen af den resulterende acceleration eller retardation [m/s^2] i bevægelsesretningen
 størrelsen af den tangentielle friktionskraft, F_{Ft} indgår med det fortegn, der bevirker, at friktionen modvirker den resulterende acceleration
 øvrige størrelser har fortegn som angivet ovenfor

Radiale kræfters ligevægt

Ligevægt for kræfterne parallelt med vejoverfladen og vinkelret på køretøjets bevægelsesretning giver, idet kræfterne regnes positivt »indad« mod horisontalkurvens centrum:

$$\begin{aligned} [22] \quad 0 &= +T_{Gr} + F_L + F_T + F_R \mp F_{Fr} \\ &= +M \cdot g \cdot \sin \alpha_r - M \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \cos \alpha_r \mp F_{Fr} \end{aligned}$$

hvor størrelsen af den radiale friktionskraft, F_{Fr} , indgår med det fortegn, der bevirker balance

Energikonstans

Betragtes køretøjet i den klassiske fysiks ideale verden, vil den energi, der er knyttet til køretøjet, som alene er påvirket af tyngdekraften, være konstant. Skelnes mellem kinetisk energi, E_{kin} , og potentiel energi, E_{pot} , gælder altså:

$$[23] \quad E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 + M \cdot g \cdot z = \text{konstant}$$

hvor M er køretøjets masse [kg]
 v er køretøjets hastighed [m/s]
 g er tyngdeaccelerationen [m/s^2]
 z er koten [m]

På en vandret vej vil den potentielle energi være konstant. Når et køretøj taber eller vinder hastighed ved kørsel på en vandret vej, vil der derfor være tale om, at det modtager eller afgiver energi, svarende til ændringen i kinetisk energi. Energiændringen er udtryk for et arbejde, som de kræfter, der påvirker køretøjet, udfører over den strækning hvor hastighedsændringen finder sted.

Betragtes en hastighedsændring, Δv , der er så lille, at de enkelte kræfter kan anses for at være konstante, mens hastighedsændringen finder sted, fås følgende udtryk:

$$[24] \quad \Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot M \cdot (v - \Delta v)^2 = \Delta L \cdot \sum F$$

hvor ΔL er den afstand, køretøjet tilbagelægger mens hastighedsændringen finder sted [m]
 F er den resulterende størrelsen af de kræfter, der påvirker køretøjet i bevægelsesretningen [N]

Den energi, som på denne måde udveksles mellem køretøjet og omgivelserne forsvinder naturligvis ikke, men omdannes til andre energiformer eller bevægelse. Køretøjets potentielle energi ændres som anført i udtryk [23]. Køretøjets trækraft skabes gennem motorens forbrænding af

drivmidler. Friktion og rullemodstand udvikler varme gennem gnidning i lejer, bremsesystem og kontaktfladen mellem dæk og vejoverfladen, og giver samtidig anledning til slitage. Køretøjets bevægelse medfører ændrede strømninger i luften omkring køretøjet.

UDKAST

Friktion

Friktionens betydning

Det fremgår, jævnfør Figur 6 og ligevægtsligningerne [18]-[22] ovenfor, at friktionen, næst efter hastigheden, er en af de helt centrale parametre i de kørselsdynamiske modeller, der lægges til grund for den geometriske vejudformning.

Friktionskræfterne er som nævnt kompenserende, de udnyttes alene i det omfang, der er brug for dem. Men der er grænser for hvor store de kan blive.

Grænserne for friktionskræfternes størrelse afhænger af de konkrete, fysiske forhold og er bestemt af vejoverfladens og køretøjets, herunder dækkenes, aktuelle egenskaber. Grænserne afhænger imidlertid også trafikanten. Dels spiller det ind, at hensynet til komfortabel kørsel begrænser udnyttelsen af den fulde friktion, der kunne gøres tilgængelig. Dels spiller det ind, at ikke alle trafikanter evner at aktivere den tilgængelige friktion fuldt ud.

Disse forhold betyder også, at den friktion, der forudsættes i vejgeometriens kørselsdynamiske modeller, ikke umiddelbart kan måles på vejen. Eller med andre ord, de friktionskrav, der stilles til en udlagt vejbelægning, knytter sig snævert til den anvendte målemetode.

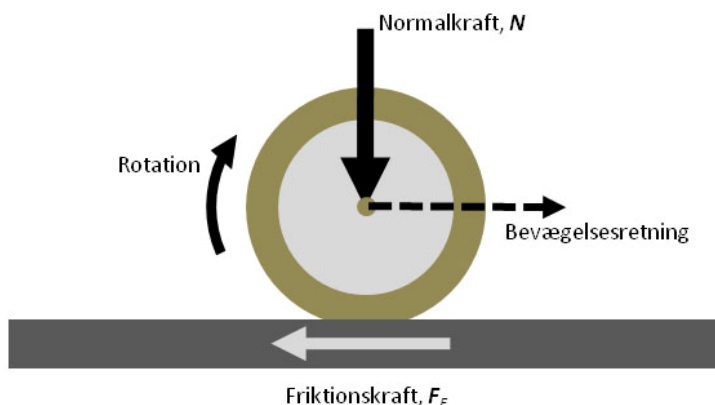
Friktionen er væsentlig for al kørsel. Friktionen giver trafikanterne mulighed for at kontrollere og manøvrere deres køretøj. Det gælder såvel i bevægelsesretningen som sideværts. Jo højere friktion, der er til rådighed under kørslen, des større kontrol har trafikanterne over køretøjet.

Som nøgleparameter i vejgeometrien fastlægger friktionen vejoverfladens maksimalt tilladelige gradienter og indgår ved bestemmelse af det nødvendige stopsigt. Herigennem indvirker friktionen ved bestemmelsen af minimumsradier for horisontal- og vertikalkurver.

Udfordringen er at designe vejbelægning, dæk og bremsesystemer, således at friktionskoefficienten holdes så lav som mulig, så længe dækket ruller på vejoverfladen, men samtidig øges mest muligt, så snart dækket begynder at skride på overfladen. Udfordringen er endvidere, at fastlægge udtryk for den størrelse, som friktionskoefficienten skal indgå med i de kørselsdynamiske modeller, således at modellerne kommer til at gengive virkeligheden rimeligt.

Definition

Når to legemer er i indbyrdes kontakt, optræder der kræfter, som modvirker, at legemerne bevæger sig i forhold hinanden. Disse kræfter kaldes friktion.



Figur 19. Simplificeret fremstilling af de kræfter, der virker på et roterende hjul.

I vejbygningsfagets kørselsdynamiske modeller er friktion den gnidningsmodstand, der modvirker en relativ bevægelse mellem et køretøjs dæk og vejbelægningens overflade. Denne modstand opstår, når dækket ruller eller skrider på belægningsoverfladen, jævnfør Figur 19.

Modstanden, der optræder, kan angives ved en dimensionsløs koefficient, f . Koefficienten er forholdet mellem på den ene side størrelsen af de friktionskræfter, F_f , der virker parallelt med kontaktfladen mellem dækket og vejoverfladen, og på den anden side, den normalkraft, N , der virker vinkelret på kontaktfladen:

$$[25] \quad f = \frac{F_f}{N}$$

Koefficienten, f , er opad begrænset af friktionskoefficienten, μ :

$$[26] \quad f \leq \mu$$

Koefficienten, f , er underlagt to andre begrænsninger, der ikke er knyttet til friktionsegenskaberne.

For det første har trafikanter en øvre, komfortbetinget grænse for accelerationspåvirkninger. Trafikanterne tilrettelægger deres kørsel, således at denne grænse ikke overskrides. Tilsvarende gælder, at ikke alle trafikanter evner at udnytte hele den tilgængelige friktion.

For det andet er den trækraft, som køretøjets motor kan levere, en begrænsning for den acceleration, som køretøjet kan foretage.

Eksempelvis gælder det, at på en vandret vej, hvor normalkraften er lig tyngdekraften, vil friktionen være begrænset af:

$$[27] \quad f = \frac{F}{N} = \frac{M \cdot a}{M \cdot g} \leq \text{Min} \left\{ \mu, \frac{a_{\text{komfort}}}{g}, \frac{a_{\text{motor}}}{g} \right\}$$

hvor: F er den vandrette kraftpåvirkning af trafikanten [N]

M er massen [kg]

a er den vandrette acceleration [m/s^2], som trafikanterne finder komfortabel, henholdsvis som køretøjets motor er i stand til at give efter overvindelse af luftmodstand og rullemodstand

g er tyngdeaccelerationen [m/s^2]

Under normale føreforhold gælder det, at de radiale påvirkninger, og hermed sidefriktionen, altså friktionen vinkelret på bevægelsesretningen, vil være begrænset af komforthensyn, mens de tangentielle påvirkninger i bevægelsesretningen, og herved bremsefriktionen, vil være begrænset af de aktuelle friktionsforhold og trafikantens evner, eller ved acceleration af køretøjets trækraft.

Friktionens fysik

Friktionsbegreber

Statisk og kinetisk friktion

Statisk friktion optræder, når de to legemer, der er i indbyrdes kontakt, ikke bevæger sig i forhold til hinanden, selv om de påvirkes af kræfter, der søger at få dem til at bevæge sig relativt.

Så længe de drivende kræfter ikke overstiger den friktionskraft, som den statiske friktionskoefficient, μ_s , kan foranledige, forbliver legemerne i indbyrdes hvile. Først når den drivende krafts størrelse overstiger værdien $\mu_s \cdot N$, hvor N er størrelsen af normalkraften, der presser legemerne

mod hinanden, begynder legemerne at glide i forhold til hinanden. Herefter er den statiske friktion ikke længere gældende; i stedet optræder den kinetiske friktion.

Kinetisk friktion optræder, når de to legemer er i indbyrdes bevægelse. Den giver anledning til en friktionskraft, der søger at standse bevægelsen, og som skal overvindes, hvis legemerne skal blive ved med at bevæge sig i forhold til hinanden.

Det gælder for alle undersøgte kombinationer af materialer, at den statiske friktionskoefficient, μ_s , er større end den kinetiske friktionskoefficient, μ_k .

Friktionsprocesser

Friktion skyldes kompleks interaktion mellem molekylerne i de to legemer, hvorimellem friktionen optræder. Det er naturligvis ikke muligt at bestemme de enkelte bidrag, som det meget store antal af molekulære interaktioner i de to legemers overflader giver anledning til. I stedet betragtes alene den resulterende kraft, friktionskraften, F_F , som optræder. Det bemærkes, at friktionskraften på denne måde får en stokastisk karakter.

Friktionsprocesserne, der finder sted mellem en vejoverflade og et dæk, er ikke kortlagt fuldt ud. Normalt anser man dog friktionen for at være sammensat af tre hovedbidrag: Adhæsion, hysteresese og slitage, jævnfør Figur 20.

Friktionsprocessernes bidrag afhænger af den konkrete vejoverflade, af det konkrete dæk og af de konkrete omstændigheder for kontakten mellem vejoverflade og dæk.

Adhæsion skyldes kontaktkræfter, der skal overvindes, mellem vejbelægningens overflade og den del af køretøjets dæk, der i det enkelte øjeblik er i umiddelbar kontakt med hinanden.

Adhæsionens størrelse afhænger af dette kontaktareal og af materialernes indbyrdes egenskaber.

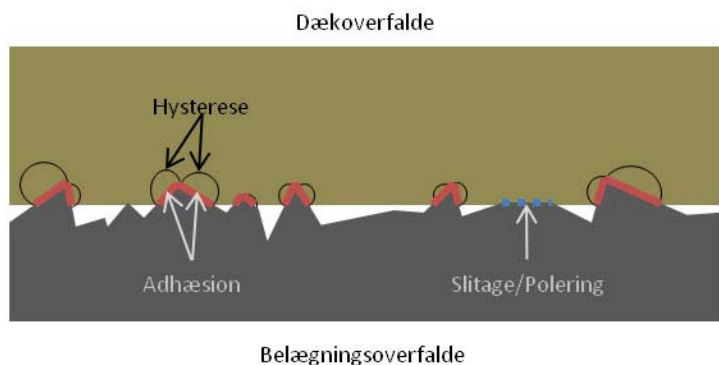
Hysteresese skyldes det energitab, der opstår på grund af deformationer af dækkens gummi og i den fleksible vejbefæstelse, når hjulene ruller over vejoverfladen.

Når et dæk under sin rotation trykkes mod belægningen, deformeres dækket. Herved bindes energi i dækkets gummi. Når dækket ruller videre, frigøres noget af den bundne energi, mens den resterende del går tabt i form af varme eller støj. Tilsvarende optræder der deformationer med binding og frigivelse af energi i fleksible belægninger.

Hysteresen regnes at være eksponentielt stigende med hastigheden.

Slitage finder sted i dækket og i vejoverfladen og skyldes brud i dækket og i vejoverfladen, og polering af vejoverfladens stenmaterialer i kontaktfladen. Slitagen finder navnlig sted i det svageste materiale, dækkets gummi eller vejens slidlag; sidstnævnte ikke mindst hvor vejoverfladen består af et ubundet lag.

Figur 20. Friktionsbidragene i kontaktfladen mellem vejoverflade og dæk stammer fra adhæsiionsprocesser, hysteresese og slitage eller polering af materialerne. Efter (38).



Forhold, der påvirker friktionen

Dæk

Dækkenes egenskaber har væsentlig betydning for de friktionskræfter, der kan etableres. Det gælder dæktypen, dækkets mønsterudformning, mønsterdybde og alder samt de materialer, dækket er opbygget af.

Vinterdæk har på tør og på våd vejoverflade en bremselængde, der i gennemsnit er 10 % henholdsvis 15 % længere end sommerdæk. Til gengæld har vinterdæk en mønsteropbygning, der gør, at dækket står bedre fast i vinterføre, og har hysteressegenskaber, der er bedre tilpasset vintertemperaturen. (39)

Tekstur

Blandt de belægningsegenskaber, der i øvrigt har størst betydning for friktionen, er vejoverfladens tekstur. Teksturen har betydning for mange andre egenskaber, som har betydning for en vejoverflade. Det drejer sig blandt andet om støj, rullemodstand og dækslid, jævnfør Figur 21.

Teksturen er udtryk for overfladens jævnhed. Der skelnes mellem belægningsoverfladens mikrotekstur, makrotekstur og megatekstur.

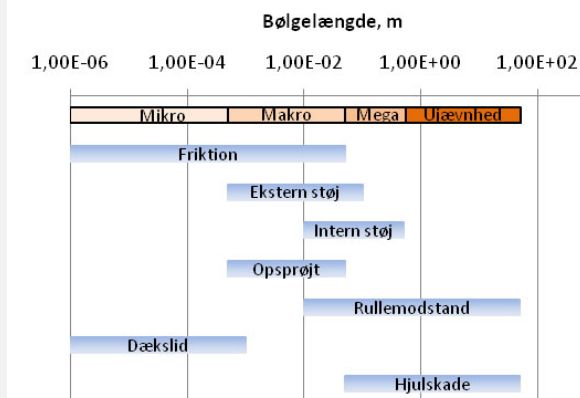
Mikroteksturen er afvigelser fra en plan overflade med bølgelængder, der er mindre end 0,5 mm, og amplituder, der normalt varierer i størrelsesordenen 0,001 – 0,5 mm. Den har relation til skarpheden eller ruheden af de enkelte korn i vejbelægningens overflade.

Makroteksturen udtrykker afvigelser med bølgelængder i intervallet 0,5 – 50 mm og med amplituder, der normalt har størrelsesordenen 0,1 – 20 mm. Den har relation til de forhøjninger og fordybninger i vejbelægningens overflade, der skyldes et mere eller mindre fremtrædende stenskelet. Makroteksturen etableres normalt med henblik på at opnå passende dræneffekt ved hjulpassager.

Megatekstur er belægningsoverfladens afvigelser fra en plan overflade med bølgelængder i intervallet 50 – 500 mm og med amplituder i størrelsesordenen 0,1 – 50 mm. Bølgelængden er altså af samme størrelsesorden som kontaktfladen mellem dæk og vejoverflade. Megateksturen er ofte relateret til slaghuller eller lunger i vejbelægningen, og er oftest uønsket, fordi den er forbundet med defekter i belægningsoverfladen.

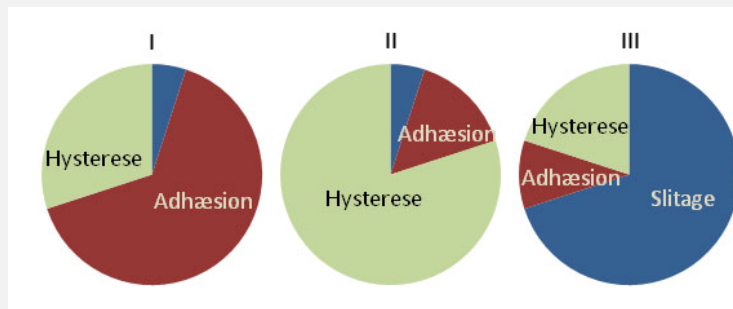
Afgivelser, ujævnheder, med endnu større bølgelængde end 500 mm kan selvfølgelig også forekomme, men regnes ikke til de tre teksturklasser.

For så vidt angår friktionsegenskaberne har mikroteksturen navnlig betydning for adhæsionen, mens makroteksturen er relateret til hysteresen.



Figur 21. Teksturbølgelængdens betydning for en række egenskaber, der knytter til kontakten mellem dæk og vejoverflade. Efter(40).

Figur 22. Principiel fremstilling af friktionsprocessernes relative størrelse ved bremsning på tør, bunden belægning (I), på våd, bunden belægning (II) henholdsvis på ubunden belægning (III). Efter (38).



Tør og våd friktion

Tør friktion optræder, når de to faste legemer er i direkte kontakt, altså uden at der er et smøremiddel tilstede i kontaktfladen.

Tør friktion er den friktionsform, man klassisk har beskæftiget sig med, og som er beskrevet i de tre klassiske friktionslove. Den klassiske tribologi¹ forudsætter, at legemerne er helt faste. For elastiske, deformerbare materialer, fx dæk og fleksible vejbelægninger, er disse forudsætninger ikke opfyldt. Amontons's 1. lov: ² »Friktionskraften er direkte proportional med den påførte belastning« er stadig gyldig, jævnfør formel [25]. Derimod gælder hverken Amontons' 2. lov: »Friktionskraften er uafhængig af kontaktarealet« eller Coulomb's friktionslov³: »Kinetisk friktion er uafhængig af den glidende hastighed«.

Våd friktion optræder, når der findes et smøremiddel, fx vand, i kontaktfladen mellem de to legemer. Smøremidlet kan overføre normalkræfterne, men ikke de glidende kræfter. Tilstedeværelsen af smøremidlet betyder derfor, at friktionen nedsættes.

Omfanget af reduktionen beror på hvor stor en del af kontaktfladen, der er berørt af smøremidlet. Udtrykt simplificeret bevirker smøremidlets tilstedeværelse, at normalkræfterne ikke fuldt ud udveksles i den direkte kontakt mellem de to legemer, men at en del udveksles gennem smøremidlet. Den friktionskraft, der kan etableres, jævnfør udtryk [25] og [26], reduceres derfor tilsvarende; se udledningerne af ligning [35] og [41]. Effekten er betydelig, blot ved en tynd film af smøremiddel.

Betydningen er illustreret i Figur 22. Diagram I og II på figuren illustrerer friktionsprocessernes relative sammensætning på samme vejoverflade i tør, henholdsvis i våd tilstand.

På den tørre belægning er adhæsionen dominerende og kan udgøre op til 80-90 % af den friktionskraft, der kan etableres. På den våde belægning mindskes adhæsionen i takt med, at dækket og vejoverfladen ikke længere får direkte kontakt med hinanden. Effekten er behersket ved lave hastigheder (< 30 km/h), men stiger ganske betydeligt ved højere hastigheder og ved øgede tykkelser af vandhinden. I stedet leverer hysterese den største friktionsbidrag.

Intuitivt forbindes våd friktion med tilstedeværelsen af vand som smøremiddel. Vand på vejoverfladen er da også den hyppigst forekommende situation; men ethvert fluidum, der kan agere smøremiddel i kontaktfladen mellem dæk og vejoverflade, giver anledning til våd friktion.

Friktionskræfterne kan eksempelvis ikke komme til fuld udfoldelse, hvis overfladerne ikke er rene og tørre. Efter en længere tørvejrperiode, vil vejoverfladen være smudsig af støv og jord og af affaldspartikler fra dæksliddet. En sådan masse, der ligger i kontaktfalden mellem vejover-

¹ Tribologi, gnidningslære, af græsk *tribêin* 'gnide' + græsk *logia* 'lære'.

² Guillaume Amontons (1663-1705), fransk fysiker.

³ Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806), fransk fysiker.

fladen og dækket, hæmmer friktionen, navnlig når regnvand opbløder massen. Samme effekt har nedfaldne blade, der ligger på vejoverfladen, samt materialer og væsker, fx olie, der er tabt eller spildt på vejoverfladen.

Is på vejoverfladen har samme virkning, og friktionskræfterne reduceres betragteligt. For at sikre, at et holdende køretøj ikke glider af en isbelagt vej, resulterer den opnåelige friktionskoefficient, der vil kunne opnås under sådanne ekstreme føreforhold, derfor i et krav om, at vejoverfladens resulterende fald ikke må overstige en given størrelse.

Vand i så stor mængde, at der dannes en vandhinde på vejoverfladen, giver anledning til risiko for akvaplaning. Akvaplaning er den ekstreme udvikling af våd friktion, hvor kombinationen af vand på vejoverfladen og dækkenes hastighed afstedkommer, at der ikke længere kontakt mellem vejoverflade og dæk, hvorfor det ikke er muligt at etablere den friktion, der er nødvendig for, at føreren kan kontrollere køretøjet. Risikoen for akvaplaning modvirkes af dækkenes mønsterudformning og -dybde. Risikoen reduceres, når hastigheden nedsættes, således at vandet kan nå at blive presset væk fra kontaktfladen på grund af køretøjets vægt.

Vandaflledning er essentiel, ikke blot for at mindske risikoen for akvaplaning på grund af vandansamlinger på vejoverfladen; men også fordi vand, der trænger ned i vejkonstruktionen gennem revner eller andre skader, svækker konstruktionens styrke og dermed er med til at forcere vejens nedbrydning. For at sikre vandaflledningen stilles der krav om at vejoverfladen har et mindste resulterende fald.

Bundne og ubundne belægninger

Diagram I og II i Figur 22 relaterer sig til vejoverflader, der består af et bundet lag. Bundne belægningslag er fx asfalt- eller cementbetonbelægninger, altså belægninger, hvor et bindemiddel holder sammen på belægningens stenskelet. Det fremgår af diagrammerne, at slitage kun bidrager med en beskedent del af friktionen. Denne slitage vil hovedsagelig stamme fra dækket.

Figurens diagram III viser til sammenligning situationen på en ubunden vejoverflade, fx en grus- eller jordvej. Her udgør slitage en betragtelig del af friktionen. Slitagen vil i dette tilfælde hovedsagelig ske på vejbelægningen, idet noget af det ubundne belægningsmateriale vil blive revet eller slynget bort ved dækkets passage.

Ubundne belægninger anvendes ikke på veje med trafik af blot nogen betydning; men anvender man grus og sand til mekanisk glatførebekæmpelse i vintertjenesten, optræder samme friktionsmekanismer som på en ubunden belægning.

Rullemodstand

Alle friktionsprocesserne, adhæsion, hysteres og slitage, der giver anledning til modstand mellem vejoverfladen og køretøjets dæk, yder et grundbidrag til den rullemodstand, der altid optræder. Selv når køretøjet, uden brug af motorkraft eller brems, bevæger sig retlinet på en helt vandret vejoverflade, optræder en rullemodstand, der fører til, at køretøjet mister hastighed i takt med at det afgiver sin bevægelsesenergi.

Rullemodstanden påvirker køretøjets energi- og brændstofforbrug og påvirker herigennem også emissionen af CO₂ og af andre udstødningsgasser og partikler. Der er derfor miljømæssige og økonomiske grunde til at tilstræbe dæk og belægninger, der giver lav rullemodstand. (41)

Sliphastighed, slipprocent, optimalt slip

Når et køretøj bevæger sig ad en vejstrækning, vil der udelukkende optræde en statisk friktion, så længe hjulene ruller frit. Også når det er nødvendigt at opbremse, eller accelerere, køretøjet, optræder den statiske friktion, så længe køretøjets hastighed svarer til hjulets vinkelhastighed – dette er tilfældet ved normal standsning af køretøjet under en kontrolleret opbremsning og ved en normal, kontrolleret acceleration.

Hvis køretøjets opbremsning, eller acceleration, er så kraftig, at hjulets vinkelhastighed ikke længere modsvares køretøjets hastighed, begynder dækkene at glide over vejoverfalden. Dæk og vejoverflade bevæger sig altså i forhold til hinanden i kontaktfladen, og der optræder en kinetisk friktion.

Forskellen mellem køretøjets hastighed og hjulets rotationshastighed kaldes sliphastigheden, v_s :

$$[28] \quad v_s = v - v_p = v - 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \omega$$

hvor: v er køretøjets hastighed [m/s]

v_p er dækkets gennemsnitlige periferihastighed [m/s]

r er dækkets radius i kontaktfladen [m]

ω er hjulets vinkelhastighed [rad/s]

Når bremsetrykket under opbremsningen øges (ved et stigende tryk på bremsepedalen), øges sliphastigheden mellem hjul og vejbelægning, indtil hjulet er fuldt blokeret, og hastigheden mellem dæk og vejbelægning er den samme som køretøjets hastighed, dvs. $v_s = v$.

Ofte er udtrykkes slippet ikke ved sliphastigheden, men ved forholdet, λ , mellem sliphastigheden og køretøjets hastighed:

$$[29] \quad \lambda = \frac{v_s}{v} = \frac{v - v_p}{v}$$

Forholdet λ kaldes slipp procenten. Ved frit rullende hjul er $\lambda = 0$ %; ved fuldt blokerede hjul er $\lambda = 100$ %.

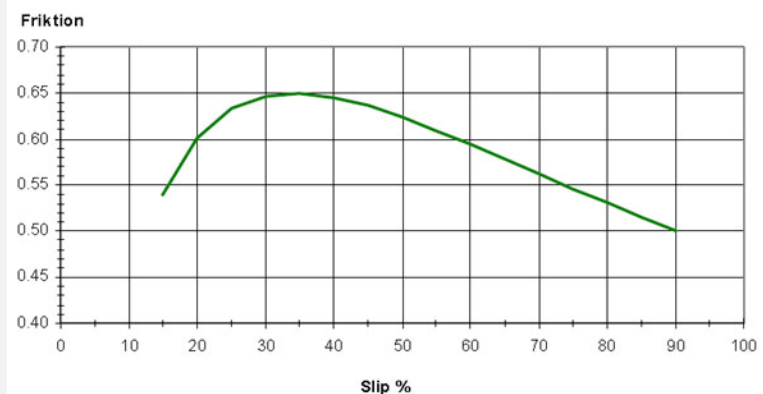
Sammenstilles slipp procenten med den opnåelige friktionskoefficient i et diagram, fremkommer et forløb, som vist i Figur 23. Friktionen stiger indtil en vis, optimal slipp procent, hvorefter den falder, indtil den komplette blokering af hjulet, hvor det alene optræder kinetisk friktion.

Det er ikke entydigt, hvilken slipp procent, der giver den optimale friktion, og hvor stor dennes modsvarende friktionskoefficient er; men svaret afhænger især af belægningsoverfladens teksturforhold. Også køretøjets hastighed har betydning for samspillet mellem slipp procent og friktion. Generelt kan siges, at med øget hastighed, vil kurven i diagrammet flytte sig nedad og få et lavere toppunkt. Tilsvarende gør sig gældende ved forringelse af belægningens teksturforhold.

Et amerikansk studium (40) angiver, at den kritiske slipp procent i reglen ligger omkring 10-20 %, og at friktionen her kan være dobbelt så høj som når hjulene er bremset, samt at differensen er meget større på våd end på tør vej.

Sammenhængen mellem slipp procent og friktionskoefficient er grundlaget for ABS-bremsesystemet, der udnytter venstre del af kurven. Under opbremsning aktiverer og deaktiverer ABS-systemet bremserne gentagne gange, således at slipp procenten holdes nær kurvens toppunkt.

Figur 23. Eksempel på sammenhængen mellem slipp procent og friktionskoefficient. I det viste eksempel opnås den største, den optimale friktionskoefficient ved en slipp procent på ca. 35 %. Efter (42).



Mekaniske friktionsmodeller

Der betragtes et hjul med pneumatisk dæk på et køretøj, som bevæger sig med hastigheden v på en vandret, jævn vej. Bevægelsen er retlinet. Hjulet bevæger sig med en hastighed, der svarer til at det har en effektiv radius på r og roterer med vinkelhastigheden ω . Der optræder ingen påvirkninger vinkelret på hjulets rotationsplan.

Et canadisk-norsk studium (38) behandler friktionen under forskellige føreforhold.

Et frit rullende hjul på tør vej

Selv et hjul, der frit ruller på en hård, ren og tør vejoverflade, er udsat for en bremsende kraftpåvirkning.

Hjulet er udsat for normalkraften, N , der virker i hjulets akse, samt den modsat rettede reaktionskraft, N_R .

I forbindelse med at dækket presses sammen, mens det ruller, sker der et energitab, der giver anledning til, at spændingsfordelingen i kontaktfladen mellem dæk og vej bliver skæv; spændingerne bliver større foran hjulets akse, hvor de bygges op, og dækket presses sammen, end bag aksen, hvor de aftrappes, og dækket genvinder sin form. Energitalet giver sig udtryk i varmeudvikling og støj ved dækkets defleksioner; i det omfang dækket ikke har ideale visko-elastiske egenskaber skyldes en del af energitabet, at dækket ikke har genvundet sin form i fuldt omfang i det øjeblik et dæksegment slipper sin kontakt med kørebanen.

Den skæve spændingsfordeling betyder, at reaktionskraften, N_R , kommer til at angribe i en afstand, d_N , foran hjulets akse, jævnfør Figur 24. Afstanden d_N øges med køretøjets hastighed.

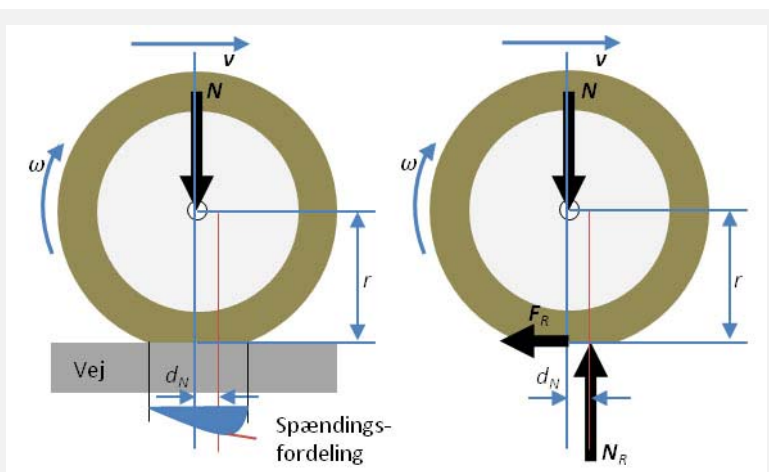
Reaktionskraften giver herved anledning til et moment omkring hjulets akse. Da det frit rullende hjul ikke bidrager til momentligevægt, må der til at udligne momentet fra reaktionskraften optræde en friktionskraft, F_R , i kontaktfladen mellem dæk og vej, altså i afstanden r fra hjulets akse:

$$[30] \quad N_R \cdot d_N - F_R \cdot r = 0$$

Kraften F_R er dækkets rullemodstand, og da størrelsen af kræfterne N_R og N er ens, findes rullemodstandens størrelse:

$$[31] \quad F_R = \frac{d_N}{r} \cdot N_R = \mu_R \cdot N$$

hvor μ_R udtrykker dækkets rullemodstands-friktionskoefficient. Koefficienten er knyttet til hjulets aktuelle geometri; såvel distancen, d_N , som hjulets effektive radius, r , afhænger af hjulets udformning, dæktryk, hastighed, mv. Værdier omkring 0,5-3 % angives som normale på tørre, stive belægninger. (38)



Figur 24. Kraftpåvirkninger på et frit rullende hjul på en tør vejoverflade. Kraften F_R er dækkets rullemodstand. Efter (38).

Bemærk, at dækkets rullemodstand blot er ét bidrag til rullemodstanden under kørslen.

Et frit rullende hjul på våd vej

Når der ligger en hinde af vand, slud eller lignende væske på vejoverfladen, skal dækket fortrænge denne hinde for at have fuld kontakt med vejoverfladen, jævnfør Figur 25.

Fortrængningen indebærer, at dækket skal overvinde en kraft, F_D , der kan antages at virke midt i frontarealet af kontaktfladen mellem dækket og væskehinden. Har hinden tykkelsen t , vil kraften, F_D , altså virke i afstanden $\frac{1}{2}t$ over vejoverfladen, eller i afstanden $r - \frac{1}{2}t$ fra hjulets akse.

Fortrængningskraftens størrelse afhænger af væskens massefylde, kontaktfladens frontareal og hastighedskvadratet:

$$[32] \quad F_D = \frac{1}{2} \cdot C_D \cdot \rho \cdot t \cdot B_D \cdot v^2$$

hvor: C_D er en konstant knyttet til væsken, dækket og vejoverfladen [-]

t er væskehindens tykkelse [m]

ρ er væskens massefylde [kg/m³]

B_D er dækkets bredde [m]

Fortrængningskraften, F_D , giver anledning til et moment om hjulets akse. Da det frit rullende hjul ikke bidrager til momentligevægt, må der for at udligne momentet fra fortrængningskraften optræde en vandret reaktionskraft, F_{DR} , i kontaktfladen mellem dæk og vej, altså i afstanden r fra hjulets akse:

$$[33] \quad F_{DR} \cdot r - F_D \cdot \left(r - \frac{t}{2}\right) = 0$$

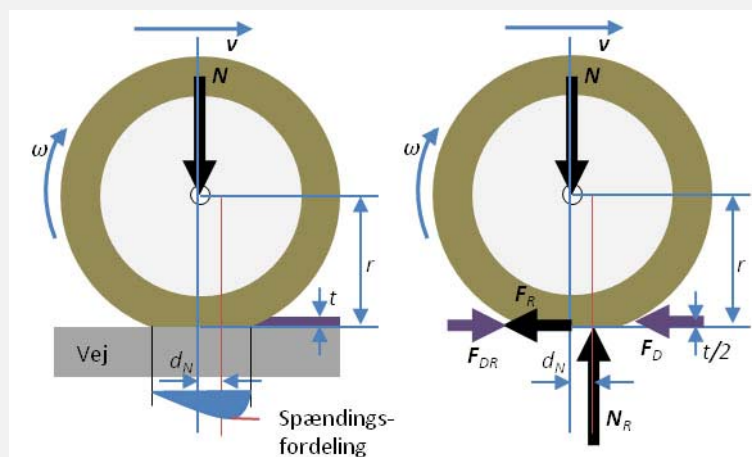
Det samlede delsystem, der knytter sit til fortrængning af væskehinden, giver således anledning til, at en resulterende bremsende kraft med størrelsen:

$$[34] \quad F_D - F_{DR} = F_D \cdot \frac{t}{2 \cdot r}$$

Størrelsen af den samlede bremsende kraft, F_{Res} , på det frit rullende hjul på våd vej bliver derfor, jævnfør [31] og [34]:

$$[35] \quad F_{Res} = F_R + F_D - F_{DR} = \mu_R \cdot N + F_D \cdot \frac{t}{2 \cdot r}$$

Figur 25. Kraftpåvirkninger på et frit rullende hjul på våd vejoverflade. F_D er modstanden fra den væskehinde, der skal fortrænges; F_{DR} er den modsat rettede resultant herfra. Efter (38).



Et planende hjul

Planing optræder, når der under et rullende hjul ligger væske, fx vand, i en så stor mængde, at væsken adskiller dækket fra vejoverfladen i en del af eller hele kontaktfladen. At der kommer til at ligge væske mellem dæk og vej skyldes, at væsken ikke når at blive presset væk i takt med, at dækket ruller hen over vejoverfladen. Det vil skyldes en kombination af en stor tykkelse på væskehinden på vejen, høj hastighed samt at dækkets mønster og vejoverfladens vandafledning ikke i tilstrækkelig grad formår at lede væsken væk hurtigt nok.

Når det rullende dæk kontaktflade kommer i kontakt med den foranliggende væske, vil noget af denne væske blive fortrængt, jævnfør foranstående afsnit.

Den væske, der ikke fortrænges, giver væsken anledning til en opdrift, F_O , der søger at løfte dækket op fra vejoverfladen. Opdriften giver plads til at der kan trænge væske ind under kontaktarealet, hvorfra normalkraften, N , vil søge at presse væsken ud gennem kanalerne i dækmønsteret mv.

Figur 26 viser en situation, hvor et frit rullende dæk er begyndt at plane. I forhold til situationen med det frit rullende dæk på en våd vej (Figur 25) er normalkraftens reaktionskraft delt på to bidrag, dels N_R , der er den del af reaktionskraften, der stammer fra den del af vejoverfladen, som stadig har direkte kontakt med hjulets dæk, dels N_O , som er opdriften, den løftende kraft fra den del af kontaktarealet, hvor væsken er trængt ind:

$$[36] \quad N = N_R + N_O$$

Opdriftens størrelse er proportional med hastigheden og kan udtrykkes på følgende form:

$$[37] \quad N_O = k \cdot A_D \cdot r \cdot \rho \cdot v$$

hvor: k er en konstant, der afhænger af væskens viskositet, $[s^{-1}]$

A_D er kontaktarealet mellem dæk og væske $[m^2]$

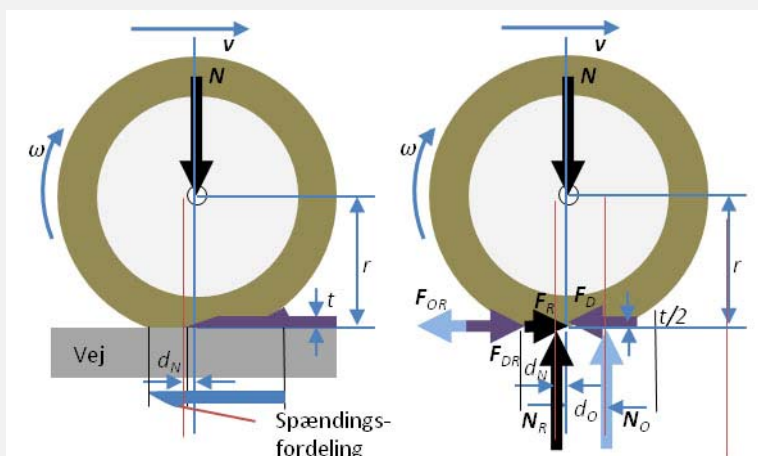
ρ er væskens massefylde $[kg/m^3]$

Opdriften, N_O , angriber i afstanden d_O fra hjulets akse. Opdriften giver herved anledning til et moment om hjulets akse. For at udligne dette moment, kræves der en vandret reaktionskraft, F_{OR} , i kontaktfladen mellem dæk og vej, altså i afstanden r fra hjulets akse:

$$[38] \quad N_O \cdot d_O - F_{OR} \cdot r = 0$$

eller:

$$[39] \quad F_{OR} = \frac{d_O}{r} \cdot N_O$$



Figur 26. Kraftpåvirkninger på et frit rullende, delvis planende hjul. Kraften N_O er den løftende kraft fra væskepuden mellem dæk og vej i kontaktfladen; kraften F_{OR} er den hertil svarende bremsende friktionskraft. Efter (38).

I takt med, at planingen øges, vil angrebepunktet for opdriften, N_O , bevæge sig fra kontaktarealets front mod hjulets centerakse.

Samtidig vil angrebepunktet for den reaktionskraft, N_R , som stammer fra den del af vejoverflader, der stadig har direkte kontakt med dækkets hjul, bevæge sig mod kontaktflades bagende. Når angrebepunktet for N_R kommer til at ligge bag hjulets centrum – svarende til situationen, der er vist på Figur 26 – vil den resulterende rullemodstand, F_R , skifte retning.

Størrelsen af den samlede vandrette kraft, F_{Res} , der påvirker hjulet på Figur 26, er:

$$[40] \quad F_{Res} = F_D + F_{OR} - F_R - F_{DR}$$

Substitueres F_R ved brug af ligning [31] og ligning [36], og substitueres F_{OR} ved ligning [34], findes:

$$[41] \quad F_{Res} = \frac{t}{2 \cdot r} F_D + \frac{d_O}{r} N_O - \frac{d_N}{r} (N - N_O) = \frac{t}{2 \cdot r} F_D + \frac{d_N + d_O}{r} N_O - \frac{d_N}{r} N$$

Når der er trængt væske ind under hele kontaktfladen, bærer opdriften hele dækket, og $N_R = 0$. Det betyder i praksis, at der ikke længere udveksles friktionskræfter mellem dæk og vejoverflade. Samtidig er d_O aftaget til nul, og udtrykket [41] udarter til:

$$[42] \quad F_{Res} = \frac{t}{2 \cdot r} F_D$$

Et opbremset hjul

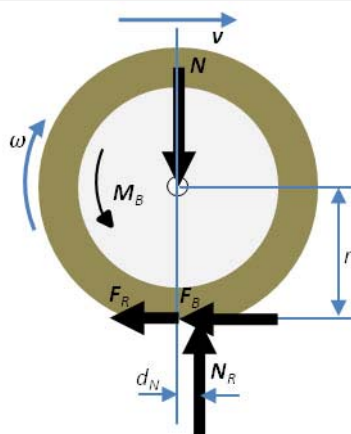
Når et hjul, der ruller, opbremses, så påføres det et bremsende moment, M_B , der virker om hjulets akse. For at opnå momentligevægt, må der i kontaktfladen mellem dæk og vej optræde en friktionskraft, F_B :

$$[43] \quad M_B - F_B \cdot r = 0$$

Figur 27 viser situationen med et opbremset hjul på en tør vejoverflade, jævnfør Figur 24, og det fremgår, at størrelsen af den resulterende vandrette kraft bliver:

$$[44] \quad F_{Res} = F_B + F_R$$

Tilsvarende udtryk kan opsættes ved at kombinere ligning [43] med ligning [35] henholdsvis ligning [41].



Figur 27. Kraftpåvirkninger på et opbremset hjul på en tør vejoverflade. Kraften F_B er den bremsende friktionskraft. Efter (38).

Afsluttende om mekaniske friktionsmodeller

Tilsvarende mekaniske friktionsmodeller kan opstilles for veje med snelæg og for veje med fleksible belægninger. (38)

I alle situationer, uanset om hjulet er frit rullende eller er opbremsset, er det væsentligt, at forholdet mellem den resulterende vandrette kraft, F_{Res} , og den normalreaktion, N_R , der optræder i den direkte kontakt mellem dæk og vej, ikke overstiger den friktionskoefficient, der kan etableres:

$$[45] \quad \frac{F_{Res}}{N_R} \leq \mu$$

Overstiges friktionskoefficienten, betyder det, at den nødvendige friktionskraft ikke kan etableres.

Ved vurderingen ses i reglen ikke på det enkelte hjul, men på hele køretøjet. Man bør dog bemærke sig, at friktionskræfterne ikke nødvendigvis er ens i kontaktfladerne ved alle køretøjets dæk. Motorens trækraft virker alene gennem de drivende hjul, og ved acceleration er der derfor behov for større friktionskræfter ved disses dæk end ved de øvrige hjul. Ved bremsning aktiveres friktionskræfter i alle dæks kontaktflader. Ved kørsel i en horisontalkurve vil der i alle dæk være påvirkninger på tværs af bevægelsesretningen; men påvirkningerne i de styrende hjuls dæk vil tillige rumme et bidrag, der skyldes, at disse hjul er drejet en smule i forhold til den retlinede bevægelse.

Friktion og vejgeometri

Friktionskoefficient

Fastlæggelse af friktionskoefficienten er et kritisk punkt i vejgeometrien, fordi friktionen direkte eller indirekte påvirker størrelsen af en række andre parametre.

De egenskaber, der bidrager til friktionen, afhænger af materialerne i samt udformningen og standen af køretøjets dæk og vejoverfladen. De afhænger endvidere af temperaturen og hastigheden. Endelig afhænger de af, om der er tale om en ren kontakt, eller om der er et »smøremiddel« til stede i form af smuds fra fx støv og jord eller i form af en vand- eller ishinde på vejen. Forholdene varierer fra sted til sted, fra køretøj til køretøj og fra tidspunkt til tidspunkt.

De nævnte forhold angår den friktion, det er fysisk muligt at opnå. Men herudover spiller trafikantens evne og vilje til at udnytte hele denne friktion ind.

Med henblik på at projektere vejene er det nødvendigt at gøre nogle forudsætninger om, hvilke friktionskræfter, der kan forventes. De værdier, der fastlægges i dette øjemed, søger at beskrive nogle »normale« forhold.

Forudsætningerne indregner en sikkerhed, som tager højde for, at forholdene i virkeligheden ikke er helt ideale, altså at vejbelægningen med årene slides, således at teksten ikke leverer optimale adhæssions- og hysteresebidrag, at bildæk ligeledes slides og derfor ikke har optimalt dækmønster og -dybde eller optimale viskoelastiske egenskaber, at dæktrykket kan være forkert, at vejoverfladen kan være våd osv. Dette er udtryk for fravigelser fra det ideale, som en erfaren fører under »normale« forhold ubevidst vil forudsætte. Derimod er der ikke taget hensyn til markante, ofte synlige forhold, fx kraftig regn og sne eller is på kørebanen, som trafikanterne forventes at erkende, eller til ekstreme situationer, fx oliespild.

Friktionsellipsen

Friktionen virker parallelt med vejoverfladen og modvirker dækkenes bevægelse på vejoverfladen. Friktionen vil altid have en komponent, F_{Ft} , der virker parallelt med bevægelseskurvsn

tangent. Ofte vil der tillige være en komponent, F_{Fr} , der virker vinkelret herpå, altså i parallelt med bevægelsens kurveradius.

De modeller, der opstilles om friktionsegenskaberne, må håndtere det forhold, at der er forskel på hvor store kraftpåvirkninger, der kan tillades i hver af disse to retninger. Der eksisterer således maksimalt opnåelige friktionskoefficienter, såvel tangentielt som radiale, $\mu_{t,Max}$ henholdsvis $\mu_{r,Max}$. Disse maksimalværdier afhænger blandt andet af dæk, vej og hastighed, og hastighedsafhængigheden er ikke ens i de to retninger.

Modellerne må endvidere afspejle, at de to komponenter begrænser hinanden indbyrdes. Den maksimalt opnåelige tangentielle henholdsvis radiale friktionskoefficient kan opfattes som de halve hovedakser i den såkaldte friktionsellipse, jævnfør Figur 28.

De to friktionskomponenter indbyrdes afhængighed betyder, at den aktuelle, resulterende koefficient skal ligge inden for friktionsellipsen:

$$[46] \quad \left(\frac{f_t}{\mu_{t,Max}} \right)^2 + \left(\frac{f_r}{\mu_{r,Max}} \right)^2 \leq 1$$

hvor f_t og f_r er den tangentielle henholdsvis den radiale komponent af den aktuelle koefficient, jævnfør ligning [25]

Udformningen af bildæk betyder, at den største friktion kan opnås i det rullende dæks tangentielle retning, altså at $\mu_{t,Max}$ udgør friktionsellipsens halve storakse.

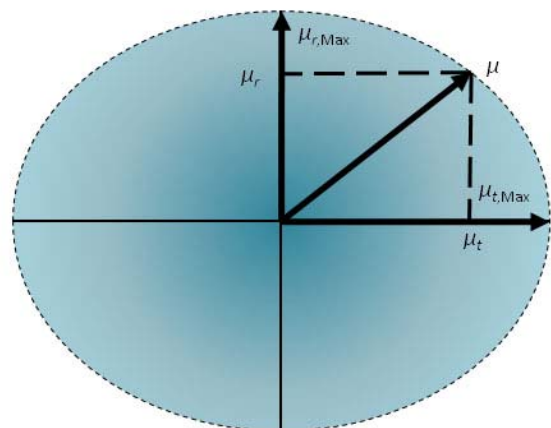
Da friktionskoefficientens hastighedsafhængighed ikke er ens i de to hovedretninger, ændrer også fejlellipsens excentricitet sig med hastigheden. I de vejgeometriske formler tages ofte udgangspunkt i en antagelse om, at den tilgængelige friktionskoefficient med rimelighed kan anses for at være ens i bevægelsens tangentielle og radiale retninger, altså at friktionsellipsens numeriske excentricitet er så lille, at ellipsen kan betragtes at være udartet til en cirkel. Dette medfører, at der om den resulterende koefficients to komponenter skal gælde:

$$[47] \quad \sqrt{f_t^2 + f_r^2} \leq \mu_T$$

hvor μ_T er den maksimale, totale friktionskoefficient – eller at det om størrelsen af den resulterende friktionskraft blot skal gælde:

$$[48] \quad F_{F,Res} = \sqrt{F_{Ft}^2 + F_{Fr}^2} \leq \mu_T \cdot N$$

Figur 28. Friktionsellipsen – friktionskraftens komponenter på langs af henholdsvis på tværs af bevægelsesretningen begrænser gensidigt hinanden, idet at den resulterende friktionskoefficient, μ , skal holde sig inden for den ellipse, der udspændes af den maksimale, tangentielle og den maksimale, radiale friktionskoefficient, $\mu_{t,Max}$ henholdsvis $\mu_{r,Max}$.



Middelbremsefriktion

Et køretøj, der har massen M , og som bevæger sig med hastigheden v , har en bevægelsesenergi, E_{kin} :

$$[49] \quad E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2$$

Under bevægelsen er køretøjet udsat for kraftpåvirkninger, der giver anledning til, at køretøjet modtager eller afgiver bevægelsesenergi svarende til den bevægelsesstrækning, de enkelte kræfter virker over. Kræfterne, der optræder, er blandt andet den aktiverede friktionskraft, rullemodstanden, luftmodstanden og motorens træk- eller bremsekraft. Bevæger køretøjet sig i en horisontalkurve optræder en centripetalkraft. Bevæger køretøjet sig op eller ned ad bakke, giver tyngdekraften anledning til ændringer i køretøjets potentielle energi, E_{pot} .

Når køretøjet opbremses konverteres bevægelsesenergien hurtigere. Ud over den energioverførsel, der sker ved at mobilisere størst mulig friktion mellem vejoverflade og dæk, omdannes der i denne situation også bevægelsesenergi til varme i selve køretøjets bremsesystem.

Ved opbremsning ændrer friktionskoefficienten sig afhængigt af den aktuelle hastighed. Afhængigheden beskrives ofte som en eksponentiel sammenhæng, eventuelt som en polynominal, hvis man ikke nøjes med en trappefunktion, hvor friktionskoefficienten antages at være konstant i hastighedsintervaller på eksempelvis 10 km/h.

Energiligevægtsligningen kan bruges til at beregne middelværdien, $\mu_{B, Mid}$, af den friktion, der optræder ved opbremsning af køretøjet fra én hastighed, v_1 , til en anden, v_2 . Sluthastigheden, v_2 , kan eksempelvis være 0 m/s svarende til fuld opbremsning.

Er den samlede bremsestrækning, L_B , bestemt gælder på vandret vej:

$$[50] \quad \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_2^2 \leq L_B \cdot \mu_{B, Mid} \cdot M \cdot g$$

eller:

$$[51] \quad \mu_{B, Mid} \geq \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot L_B \cdot g}$$

Stiger eller falder vejen under vinklen α , skal den betydning, som længdegradienten, $s = \tan \alpha$, har for køretøjets potentielle energi medtages:

$$[52] \quad \Delta E_{pot} = M \cdot g \cdot \tan \alpha = M \cdot g \cdot s$$

hvor længdegradienten indsættes som positiv værdi ved kørsel op ad bakke.

Greibe (43) har på baggrund af danske kørselsforsøg foreslået, at der på retlinede strækninger arbejdes med en hastighedsuafhængig middelbremsedeceleration på 3,65 m/s², svarende til en middelbremsefriktionskoefficient på $\mu_{B, Mid} = 0,372$. Flere forhold indgår i baggrunden herfor.

For det første, at de moderne, blokeringsfri bremsesystemer sikrer, at hjulene holdes rullende, således at man under opbremsningen i højere grad udnytter den statiske friktionskoefficient, μ_s , mellem vejoverflade og dæk.

For det andet, at køretøjernes bremsesystemer synes at vinde effektivitet i takt med, at de som følge af den termiske energi, der dannes ved opbremsningen, bliver varme. Herved kan bremsesystemerne bedre kan indstille sig på den optimale slipp procent. Effektivitetsforbedringen optræder altså i den lavere ende af hastighedsforløbet, men forbedringen er større, desto større udgangshastigheden er.

Endelig indgår en række forudsætninger om hvordan den »almindelige« trafikants adfærd adskiller sig fra det optimale bremseforløb, som en trænet, »professionel« trafikant formår at udnytte.

Den foreslåede konstante, resulterende middelfriktionskoefficient kræver, at den aktuelle friktionskoefficient lader sig udtrykke som funktion af såvel den aktuelle hastighed som af udgangshastigheden ved begyndelsen af opbremsningen og hermed også som funktion af den termiske energi, der aflejres i køretøjets bremsesystem. Forholdet betyder jo, at det afhænger af udgangshastigheden hvor lang delbremselængden vil være for et delinterval, eksempelvis fra 60 km/h til 50 km/h. Hele funktionen skal altså kendes, når man skal beregne bremselængden ved en delvis opbremsning, altså hvor køretøjet ikke skal bringes til standsning, men blot skal opnå en given hastighedsreduktion.

Friktionskoefficienter i danske vejregler¹

1943-vejreglerne

De danske vejregler fra 1943 (34) anvender i forbindelse med fastsættelsen af standselængder og minimumsradier bremsefriktionskoefficienter, μ_B , der er 0,25 ved 40-60 km/h og stiger til 0,4 ved hastighedsfaktoren 100 km/h.

Det fremgår af bemærkningerne til de »gamle« vejregler, at det forudsættes, at trafikanterne i højere grad tilpasser adfærden til forholdene, end det i dag synes muligt at forudsætte: »Friktionskoefficienten for en tør Vejbane kan påregnes at være 0,4, medens den under ugunstige Vejrforhold kan regnes at være 0,25. (Ved Isslag er den 0,1 eller mindre, men dette er der set bort fra i denne Forbindelse, da Hastigheden i saadant Tilfælde maa regnes at være ganske ringe). Der er i ovenstaaende Beregning regnet med den af Justitsministeriet krævede Friktionskoefficient 0,4 for 4-hjulsbremsede Vogne for Hastighedsfaktoren 100 km/Time, idet det maa forudsættes, at denne Hastighed kun anvendes, naar Vejbanens Tilstand er en saadan, at det er forsvarligt at køre saa hurtigt, medens der er regnet med Friktionskoefficient 0,25 for Hastigheder paa 60 km/Time og derunder. For Hastigheder mellem 100 km/Time og 60 km/Time er anvendt gradvis faldende Friktionskoefficient fra 0,4 til 0,25«.

Selv om de »gamle« danske vejregler formelt set aldrig er blevet erstattet af nyere, endeligt godkendte regler aldrig, for så vidt angår tracéringselementerne i det åbne land, er der vist nok bred enighed om, at de »gamle« danske vejreglers værdier og modeller ikke længere afspejler *best practice* eller nyeste viden, og værdierne bør derfor ikke anvendes.

1964-udkastet

Udkast til vejregler fra 1964 (12) anfører blandt forudsætningerne for beregning af nødvendige sigtelængder, at den udnyttede middelfriktionskoefficient ansættes til 0,3 ved dimensioneringshastigheder op til 70 km/h, til 0,5 km/h ved dimensioneringshastighed i intervallet 80-100 km/h, og til 0,4 ved dimensioneringshastighed 120 km/h.

Det anføres i udkastet i tilknytning hertil, at på tør vejbelægning vil de »anførte friktionskoefficienter altid forefindes, og det vil her være køretøjernes bremseeffekt, der bestemmer bremselængderne. Normalt vil alle personvogne under opbremsning kunne udnytte de anførte friktionskoefficienter, medens adskillige lastvogne ikke vil kunne det«. Sidstnævnte forhold er ifølge udkastet uden betydning, da lastvogne dengang havde en tilladt maksimalhastighed på 60 km/h, hvor de fastlagte sigtelængder er beregnet ud fra en friktionskoefficient på 0,3.

Udkastet anfører, at »på en ikke tør vejbane kan der forekomme friktionskoefficienter, der er lavere end de anførte, og som derfor bliver bestemmende for bremselængden, men der er her gjort den naturlige forudsætning, at kørsel med de høje hastigheder ikke finder sted under sådanne forhold«.

¹ Appendiks B behandler friktionskoefficienter i nogle andre lande.

Tabel 6. Decelerationsværdier ved motorbremsning i henhold til Motorvejsreglerne (13).

V [km/h]	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
g_m [m/s ²]	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1

Udkastet angiver endvidere krav til vejoverfladens jævnhed, og det kræves at kørebanelægningens friktionskoefficient – målt ved 60 km/h på en specificeret måde – i de første to år efter belægningens udførelse skal være mindst 0,5 og aldrig må være mindre end 0,4. Endvidere må friktionskoefficienten ikke falde mere end 0,1 fra friktionskoefficienten målt ved en hastighed, der er 20 km/h større.

Motorvejsreglerne

Motorvejereglerne (13) anfører ikke friktionskoefficienter, men alene decelerationsværdier. Det angives at decelerationsværdier på 2-3 m/s² ofte forekommer under normale trafikforhold, og at »forsøg her i landet har vist, at den øvre grænse for helt komfortabel deceleration er ca. 2,0 m/sek²«. I tilgift anføres det, at pakker og lignende ved en deceleration på 4 m/s² vil begynde at glide af sæderne, og at en deceleration på 6 m/s² eller derover er en »katastrofeopbremsning, hvor passagererne må presse sig fast i sædet for ikke at blive slynget frem«.

Motorvejsreglerne fastsætter på den baggrund, at en komfortabel opbremsning foretages med en decelerationsværdi på 2,0 m/s². Motorvejsreglerne fastsætter tillige, at der ved forudsigelige opbremsninger skal regnes med, at forløbet indledes med motorbremsning i 2 sekunder. Motorbremsningens decelerationsværdi, g_m , fremgår af Tabel 6.

Nye danske vejregler og vejregelforslag

De danske vejregelforslag for det åbne land, (14)(15), og vejreglerne for byernes trafikarealer, (28)(10), angiver middelfriktionskoefficienten, dels $\mu_{T, \text{Mid}}$ for den totale, resulterende friktionskoefficient, der kan optræde (og som kan anvendes ved fuld opbremsning på retlinet vej), dels $\mu_{B, \text{Mid}}$ for den bremsefriktionskoefficient, der kan regnes med ved fuld opbremsning, hvor der samtidig skal tages hensyn til, at der også kan optræde en sideacceleration, jævnfør Tabel 7.

Friktionskoefficienten kommer indirekte til udtryk i de tracéringsværdier, der er anført; navnlig i de standselængder, som er fastsat på grundlag af den resulterende, gennemsnitlige friktionskoefficient, der optræder ved fuld opbremsning fra givne hastigheder i intervallet 50–130 km/h.

Vejdirektoratet oplyser (26), at standselængderne i vejreglerne/vejregelforslagene bygger på resultaterne fra amerikanske bremseforsøg fra midten af 1960'erne og udført med datidens amerikanske biler med den daværende bremseteknologi.²

	Hastighed	Middelfriktionskoefficient	Middelbremsefriktionskoefficient
	V_0 [km/h]	$\mu_{T, \text{Mid}}$	$\mu_{B, \text{Mid}}$
Tabel 7. Sammenhørende værdier af ønsket hastighed, V_0 , middelfriktionskoefficient, $\mu_{T, \text{Mid}}$, og middelbremsefriktionskoefficient, $\mu_{B, \text{Mid}}$. (14).	130	0,28	0,27
	120	0,29	0,28
	110	0,30	0,29
	100	0,31	0,30
	90	0,33	0,31
	80	0,34	0,31
	70	0,35	0,31
	60	0,36	0,31
	50	0,377	0,31

¹ Motorvejsreglerne oplyser desværre ikke en kilde for disse forsøg.

² Desværre angiver hverken Vejdirektoratet eller vejreglerne kilder til disse målinger.

Det kan imidlertid eftervises (44), at vejreglernes totale friktionskoefficienter¹ med meget god tilnærmelse ($r^2 = \text{XXXXX}$) også kan forklares ved en model, der er knæsat gennem det samarbejde, som de nordiske lande i regi af NVF² tidligere havde om vejstandarder.

Ifølge denne forklaring kan de danske vejreglers totale friktionskoefficient, μ_T , udtrykkes som en eksponentialfunktion af den aktuelle hastighed, v [m/s]:

$$[53] \quad \mu_T = A \cdot e^{B \cdot v}$$

hvor parameteren $A = 0,46$ [-]
parameteren $B = -0,0205$ [s/m]

Udgangspunktet for formlen, synes bedst beskrevet i en rapport fra *Vägverket* i Sverige, (45), og tager afsæt i fem forudsætninger:

- For det første, at målinger, som Statens Väg- och Transportforskningsinstitut i Linköping har foretaget på asfaltbeton-belægninger, viste, at den totale friktionskoefficient med blokerede hjul kunne beskrives som afhængig af hastigheden V [km/h] ved følgende udtryk:

$$\mu_T = 0,92 \cdot e^{-0,0063V}$$

- For det andet, at den dimensionerende totale friktion sættes til $2/3$ af denne værdi.
- For det tredje, at den sidefriktionskoefficient, som trafikanterne finder acceptabel ved en given hastighed, kan angives ved udtrykket:

$$f_{S,Max} = 0,28 \cdot e^{-0,0096V}$$

- For det fjerde, at friktionsellipsen kan tilnærmes til en cirkel, således at den maksimale bremsefriktionskoefficient, $\mu_{B,Max}$, ved forskellige hastigheder kan beregnes ud fra værdierne for den totale friktionskoefficient og den acceptable sideaccelerationskoefficient:

$$\mu_{B,Max} = \sqrt{\mu_T^2 - f_{S,Max}^2}$$

- For det femte, at de beregnede værdier for bremsefriktionskoefficienten kan angives ved udtrykket:

$$\mu_B = 0,55 \cdot e^{-0,0057V}$$

Den totalfriktion, der kan genfindes i de danske vejregler, er afledt af dette udtryk, idet der i formel [53] er indarbejdet yderligere to forudsætninger:

- For det sjette, at hastigheden udtrykkes i [m/s]
- For det syvende, at den totale friktion fremkommer ved at indregne en sikkerhedsfaktor, $\gamma_\mu = 1,20$, i forhold til NVF's udtryk for bremsefriktionskoefficienten. Proveniensen af denne sikkerhedsfaktor synes at fortabe sig.

Bremselængde og middelfriktionskoefficient på grundlag af den hastighedsafhængige friktion, udtrykt ved formel [53] kan beregnes analytisk, når der køres retlinet på en hel vandret vej.

Der gælder:

$$[54] \quad \frac{d^2L}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a = -\mu_T \cdot g = -A \cdot e^{B \cdot v} \cdot g$$

hvor L er den tilbagelagte vejlængde [m]

¹ Vedrørende bremsefriktionskoefficienten og middelbremsefriktionskoefficienten henvises til omtalen nedenfor.

² NVF forkortelse for Nordisk Vejteknisk Forbund, nu Nordisk VejForum.

t er den medgåede tid [s]

v er køretøjets aktuelle hastighed [m/s]

a er størrelsen af køretøjets aktuelle acceleration [m/s²]

g er tyngdeaccelerationen [m/s²]

Omskrives udtrykket:

$$[55] \quad dt = \frac{-1}{g \cdot A} \cdot e^{-B \cdot v} \cdot dv$$

og udnyttes, at at hastigheden er den tidsafledede af den tilbagelagte bremselængde, findes:¹

$$[56] \quad L = \int dl = \int v dt = \frac{-1}{g \cdot A} \cdot \int e^{-B \cdot v} \cdot v \cdot dv = \frac{-1}{g \cdot A \cdot B} \cdot \left(v + \frac{1}{B} \right) \cdot e^{-B \cdot v} + C_1$$

hvor konstanten C_1 bestemmes ud fra at i udgangssituationen, hvor opbremsningen påbegyndes, $L_0 = 0$, er hastigheden v_0 :

$$[57] \quad C_1 = \frac{1}{g \cdot A \cdot B} \cdot \left(v_0 + \frac{1}{B} \right) \cdot e^{-B \cdot v_0}$$

Bremselængden, L_B , bestemmes herefter af formel [56], svarende til, at det fuldt opbremsede køretøjs hastighed er 0:

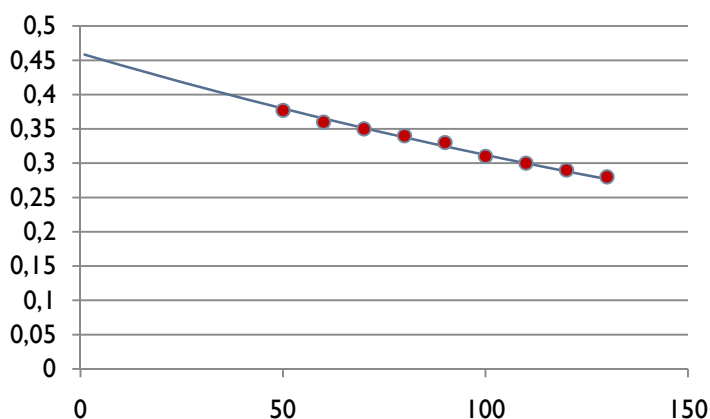
$$[58] \quad L_B = \frac{1}{g \cdot A \cdot B^2} - \frac{1}{g \cdot A \cdot B} \cdot \left(v_0 + \frac{1}{B} \right) \cdot e^{-B \cdot v_0}$$

Middelfriktionskoefficienten – altså den friktionskoefficient, der ville have optrådt, dersom friktionen havde været konstant under opbremsningen – kan herefter bestemmes af udtryk [51], jævnfør Figur 29.

Hvis der ikke er tale om retlinet kørsel på helt vandret vej, skal friktionskoefficienten i udtryk [53] korrigeres for indflydelsen fra længdegradienten og/eller fra sideaccelerationen.

Ligning [51] løses i disse tilfælde numerisk, idet bremselængden bestemmes ved at se på så små, trinvis ændringer af hastigheden, at friktionskoefficienten og dermed køretøjets acceleration med rimelighed kan anses for at være konstante inden for det enkelte inkrement.

Figur 29. Total middelfriktionskoefficient, $\mu_{T, Mid}$, ved retlinet kørsel på vandret vej dels (rød) i henhold til vejreglerne, jævnfør Tabel 7, dels (blå) i henhold til den eksponentielle model, jævnfør udstyk [51], [53] og [58], idet der de anvendte parametre er: $A = 0,46$, $B = -0,0205$ s/m og $g = 9,818$ m/s². Abscisseaksen angiver udgangshastigheden [km/h].



¹ Jævnfør tabelværker for integraler.

Som eksempel kan betragtes den situation, hvor opbremsningen sker på en retlinet strækning, der ikke er vandret, men har en konstant længdegradient, $s = \tan \alpha_t$. Det antages, at strækningen ikke har nogen sidegradient, $i = 0$.

Køretøjets acceleration, a , bliver, når udtrykkes friktionskoefficienten som en eksponentialfunktion af hastigheden, jævnfør formel [51]:

$$[59] \quad a = g \cdot \cos \alpha_t \cdot (A \cdot e^{B \cdot v} \mp s)$$

hvor konstanterne A og B er fastsat som i formel [51]
længdegradientens fortegn er positivt ved fald og negativt ved stigning

Arbejdes der i den numeriske bestemmelse af bremselængden med konstante trinstørrelser, Δv , og betragtes det n 'te inkrement, $v_n = v_{n-1} + \Delta v$, findes den tilbagelagte afstand, ΔL_n :

$$[60] \quad \Delta L_n = \frac{v_n^2 - v_{n-1}^2}{2 \cdot a} = \frac{v_n^2 - (v_n - \Delta v)^2}{2 \cdot g \cdot \cos \alpha_t \cdot \left(A \cdot e^{B \left(\frac{v_n - \Delta v}{2} \right)} - s \right)}$$

og bremselængden bestemmes derefter af:

$$[61] \quad L_B = \sum_n \Delta L_n$$

Den tid, Δt_n , det tager køretøjet at tilbagelægge afstanden i det n 'te trin, ΔL_n , bestemmes ved at inddrage middelhastigheden på delstrækningen:

$$[62] \quad \Delta t_n = \frac{2 \cdot \Delta L_n}{v_n + v_{n-1}}$$

og bremsetiden bestemmes derefter af:

$$[63] \quad t_B = \sum_n \Delta t_n$$

Beregningen kan gentages med gradvis mindre værdier af inkrementet, Δv , indtil afvigelserne mellem successive beregninger er så beskeden, at unøjagtigheden kan anses for at være uden betydning for resultatets praktiske anvendelse. Beregninger med en trinstørrelse på $\Delta v = -1$ km/h er i praksis fuldt tilstrækkelig i vejgeometrisk sammenhæng, og et inkrement på 10 km/h er ikke ualmindelig.

Nye vejregelværdier for motorveje

Vejreglerådet har i sit møde den 16. juni 2009 (25), besluttet, at de danske vejregler skal tilpasses, således af standselængder på motorveje bliver baseret på den model, der er anvendt i de nye tyske *Richtlinien für de Anlage von Autobahnen (RAA)* (46), herunder med hastighed, retardationsværdi og objektpunkthøjde, der er anført i RAA.

For så vidt angår bremsefriktionen betyder det, at friktionskoefficienten på retlinede motorvejsstrækninger sættes til at være:

$$[64] \quad \mu_B = \frac{a_B}{g} = \frac{3,7}{9,81} = 0,377$$

idet: a_B er den retardation, der som en gennemsnitsværdi kan opnås ved bremsning uden brug af ABS; $a_B = 3,7$ m/s² i følge RAA,
 g er tyngdeaccelerationen

Bemærk, at der er tale om, at gennemsnitsretardationen er konstant uanset udgangshastighed, og at dette ikke er ensbetydende med, at decelerationen er konstant og ens over alle de enkelte forløb.

Beslutningen er endnu ikke indarbejdet i de danske vejregler, og der udestår nogle spørgsmål, der først besvares ved denne implementering. Ved sin beslutning har Vejreglerådet formentlig implicit udtrykt forventning om, at de danske motorvejes horisontale minimumskurver bliver fastlagt på grundlag af den model, som RAA anvender, herunder for RAA's udtryk for størrelsen af den radiale friktionskoefficient:

$$[65] \quad f_r = n \cdot 0,925 \cdot \mu_B$$

hvor: n er en regningsmæssig udnyttelsesgrad, der er fastsat i de tyske retningslinjer for Autobahnen.

Diskussion af de danske vejreglers friktionsværdier

Det kan diskuteres, om de danske vejregler for det almindelige vejnet anlægger et for konservativt udtryk for den totale friktionskoefficient, der kan etableres mellem dæk og vejoverflade.

På den ene side giver udtrykket værdier for bremselængder på retlinjede strækninger, der stemmer rimeligt overens med de længder, som dansk projekteringspraksis og danske afmærkningsbestemmelser har forudsat, og som trafikanterne må formodes at have vænnet sig til at kunne forvente. Vejreglernes værdier for bremselængder ligger endvidere på samme niveau som det, der anvendes i udlandet ved hastigheder under 90 km/h, altså ved de hastigheder, der må køres med på det almindelige vejnet.

På den anden side er proveniensen af friktionsudtrykket i formel [53] noget belastende. Dels trækkes sideaccelerationens indflydelse så at sige fra to gange undervejs. Dels reduceres udgangsniveauet først til $2/3$ og siden ved at dividere med sikkerhedsfaktoren, $\gamma_\mu = 1,20$. Der er altså gået med livremme og seler undervejs.

Hertil kommer, at udgangsniveauet er fastlagt på grundlag af friktionsmålinger ved hastigheder på op til 90 km/h. De eksponentielle sammenhænge er bragt til at stemme fornuftigt til forudsætningerne ved hastigheder i dette interval. Ved lavere hastighed er konsekvenserne i form af bremselængdens størrelse beskedne; men ekstrapoleres til højere hastigheder giver den eksponentielle sammenhæng naturligvis anledning til, at en eventuel brist i den forudsatte sammenhæng giver sig udslag i friktionskoefficienter, der hurtigt bliver stedse mere tydelige.

Ved motorvejshastigheder giver de danske vejreglers hidtidige friktionsværdier anledning til bremselængder, der er højere end de, der anvendes i udlandet. En naturlig forklaring er kombinationen af, at man ekstrapolerer ud over det interval, der foreligger målinger for, samt den forudsatte eksponentielle sammenhæng.

Der har altså i sig selv været god grund til at se på, om det hidtil anvendte udtryk for friktionskoefficienten stadig er det bedste, der kan stilles til rådighed.

Den løsning, som Vejreglerådet er landet på, må imidlertid beklages. Løsningen medfører, at Danmark anvender to indbyrdes inkonsistente modeller for friktionskoefficienter, en for almindelige veje og en for motorveje. Der er ingen fornuftig teknisk forklaring på, at friktionen skulle opføre sig forskellig afhængig af, om en vejstrækning har status som motorvej eller ej.

Derfor var det klædeligt, hvis Vejreglerådet havde implementeret ønsket om at sænke standselængderne på motorvejene gennem en modeljustering, der også omfattede forholdene på det almindelige vejnet.

Kørselsdynamik i længdeprofilet

Igangsætning

Ved kørsel op ad bakke skal der være tilstrækkelig friktion. Behovet vurderes traditionelt i relation til et holdende køretøj, der skal igangsætte kørsel. Bakken antages at have længdegradient $s = \tan \alpha_t$, og vandret tværsnit ($i = \tan \alpha_r = 0$).

Det forudsættes, at køretøjet har den nødvendige trækraft.

Optrædende kræfter

De kræfter, der påvirker køretøjet i længdesnitsplanet, altså parallelt med bevægelsesretningen, er, jævnfør Figur 30, ud over trækraften, den lodrette tyngdekraft, F_G , vejbelægningens reaktionskraft, F_N , samt rullemodstanden, F_R , og de tangentielle friktionskræfter, F_{Ft} . Da køretøjet sætter i gang, er hastigheden nul, og luftmodstanden kan negligeres.

Rullemodstanden optræder ved alle hjul på køretøjet. Derimod er det i denne situation, hvor køretøjet sætter i gang, alene de tangentielle friktionskræfter mellem vejoverfladen og dækkene på køretøjets drivende hjul, der kan medtages. Denne del er proportional med, hvor stor en andel af køretøjets masse, der overføres til vejbelægningen gennem de drivende hjul.

Maksimalgradient

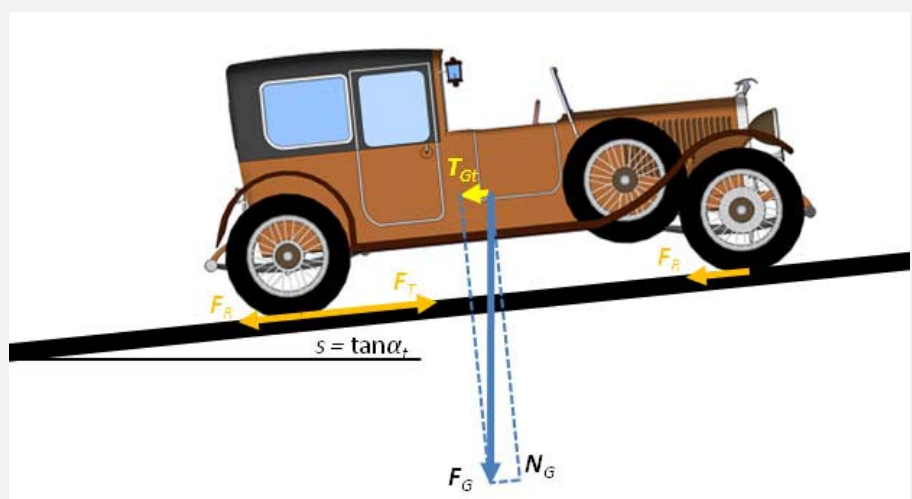
Ligevægtsligningerne er, for så vidt angår de normale kræfter som angivet i udtryk [19], og for så vidt angår de tangentielle kræfter som angivet i udtryk [21]. Hvis d [-] betegner den del af køretøjets masse, der overføres gennem de drivende hjul, kan størrelsen af den optrædende normalreaktion, F_{Nd} , og kravet til den nødvendige tangentielle friktionskraft, F_{Ft} , skrives:

$$[66] \quad F_{Nd} = d \cdot F_N = d \cdot M \cdot g \cdot \cos \alpha_t$$

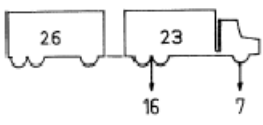
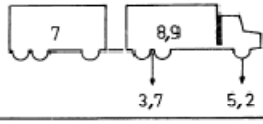
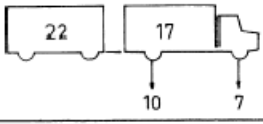
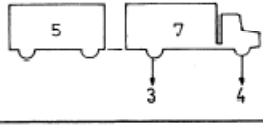
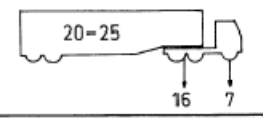
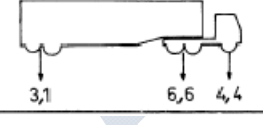
$$[67] \quad \begin{aligned} T_{Gt} + F_R &= M \cdot g \cdot \sin \alpha_t + \mu_R \cdot M \cdot g \cdot \cos \alpha_t \\ &= F_{Ftd} = \mu \cdot F_{Nd} = \mu_t \cdot d \cdot M \cdot g \cdot \cos \alpha_t \leq \mu_{t,\max} \cdot d \cdot M \cdot g \cdot \cos \alpha_t \end{aligned}$$

hvor M er køretøjets masse [kg]
 g er størrelsen af tyngdeaccelerationen
 μ_R er rullemodstands-koefficienten [-]

Figur 30. Kraftpåvirkningen på et køretøj, der sætter i gang op ad en bakke. Trækraften, F_T , der overføres gennem de tangentielle friktionskræfter ved de drivende hjul, skal kunne modvirke summen af rullemodstanden, F_R , ved alle hjul og den vejoverfladeparallele komponent, T_{Gt} , fra tyngdekraften, F_G .



Figur 31. Nogle lastbiltyper og deres fordelingen af masse på akslerne. Illustrationen afspejler forhold i Sverige i 1983. Fra (45).

Lastbils kombination (Siffrorna anger tyngden i ton)	Andel tyngd på drivaxeln, d
a) 	$\frac{10^{23}}{23+26} = 0,22$ *) Antag att drivande axeln på boggien alltid har max belastning, dvs 10 ton.
b) 	$\frac{3,7}{7+8,9} = 0,23$ (fall a) tom)
c) 	$\frac{10}{22+17} = 0,26$
d) 	$\frac{3}{7+5} = 0,25$ (fall c) tom)
e) 	$\frac{10}{35} = 0,29$
f) 	$\frac{6,6}{3,1+6,6+4,4} = 0,47$ (fall e) tom)

μ_t er den friktionskoefficient [-], det er nødvendigt at etablere mellem de drivende dæk og vejoverfladen i den tangentielle retning

$\mu_{t,max}$ er den maksimale friktionskoefficient [-], der kan opnås i denne retning

Heraf følger uligheden:

$$[68] \quad \sin \alpha_t + \mu_R \cdot \cos \alpha_t = \mu_t \cdot d \cdot \cos \alpha_t \leq \mu_{t,max} \cdot d \cdot \cos \alpha_t$$

hvoraf følgende krav til længdegradienten, s, udledes:

$$[69] \quad s = \tan \alpha_t \leq \mu_{t,max} \cdot d - \mu_R$$

Størrelsen d , der angiver fordelingen af køretøjets masse, afhænger af køretøjets opbygning og læsning. For personbiler er værdien af d cirka 0,5, for lastede, tunge køretøjer kan d antage værdier ned til cirka 0,2. Figur 31 viser, hvordan størrelsen kan variere ved forskellige udformninger og læsninger.

Maksimal længdegradient i danske vejregler

De danske vejregler rummer ikke anvisninger om, hvordan man skal håndtere problemstillingen med fordelingen af køretøjets masse. I stedet angives behandles den maksimale længdegradient, s, direkte.

1943-vejreglerne (34) angiver, at længdegradienten normalt ikke bør overskride 35 ‰ på landeveje og 50 ‰ på øvrige veje.

1964-udkastet til vejregler (12) angiver tilsvarende at længdegradienten normalt ikke bør overskride 35 ‰ på hovedlandeveje (herunder motorveje) og på landeveje af 1. klasse, mens grænsen er 50 ‰ på øvrige landeveje og på biveje.

De seneste vejregelforslag (15) angiver, at længdegradienten bør være så lille som mulig, og at den ved nyanlæg under alle omstændigheder ikke må overstige 60 ‰:

$$[70] \quad s = \tan \alpha_t \leq 60 \quad \text{‰}$$

Samtidig skal på påses, at det maksimale resulterende fald på kørebanen ikke overstiger 70 ‰, jævnfør udtryk **Fejl! Henvisningskilde ikke fundet.**].

Kravet, $s \leq 60 \text{ ‰}$, medfører eksempelvis, at de drivende hjul på en ekstremt lastet lastbil, $d = 0,2$, netop kan holde køretøjet fast på bakken, hvis rullemodstands-koefficienten kan antages at være $\mu_R = 0,1$, og der kan opnås en tangentiel friktionskoefficient på $\mu_t = 0,35$.

Bemærk, at der i alle regelværkerne gælder særlige, skærpede krav på hvilestrækningerne op mod en rundkørsel eller mod et kryds med en mere betydende vej. I det seneste vejregelforslag (15) er kravet, at der på en hvilestrækning på 25 m ikke må være større længdegradient end 25 ‰.

Oversigt i vertikalkurver

Blandt de grundlæggende krav til vejtracéet er, at trafikanterne skal kunne opfatte hindringer og hinanden så betids, at de er i stand til at standse eller undvige før påkørsel. Kravet betyder, at trafikanterne skal kunne se, have oversigt, en vis afstand frem.

Den nødvendige afstand afhænger af hastigheden og af den situation, der skal forebygges. Man skelner mellem om der er behov for stopsigt, mødesigt eller overhalingssigt. I alle tre tilfælde, skal såvel det vertikale som det horisontale forløb vurderes. Det sker særskilt.

I forhold til vejens længdeprofil betyder kravet, at tracéets vertikalkurver skal være større end en mindste værdi.

Geometriske sammenhænge

Konvekse vertikalkurver

I konvekse (nedad hule) vertikalkurver skal den nødvendige oversigt være til stede hen over bakkens top.

Lang kurve

Er der tale om en lang, konveks vertikalkurve, er situationen, som skitseret i Figur 32. Heraf fremgår, at sigtelængden, S [m], kan udtrykkes:

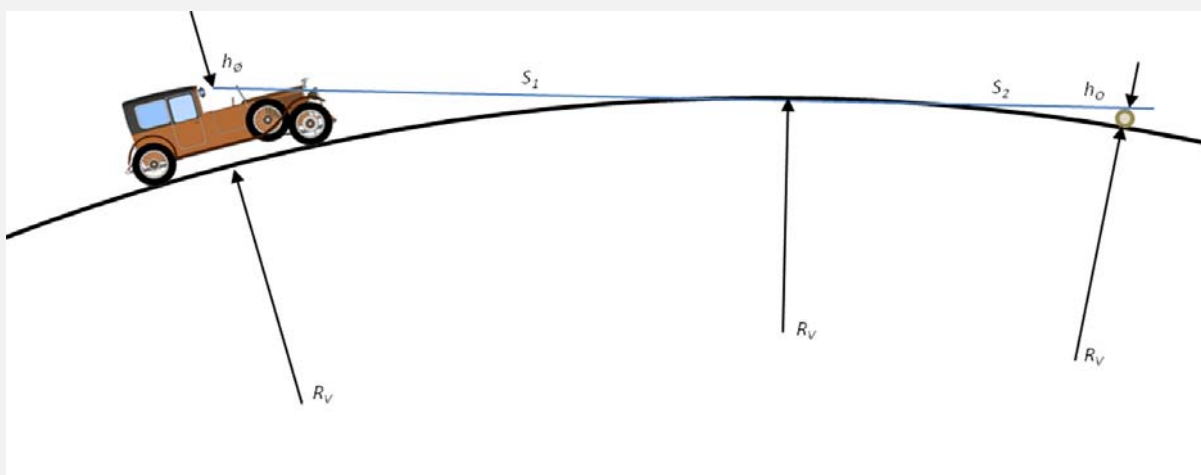
$$[71] \quad \begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \sqrt{(R_V + h_\emptyset)^2 - R_V^2} + \sqrt{(R_V + h_o)^2 - R_V^2} = \sqrt{2 \cdot R_V \cdot h_\emptyset + h_\emptyset^2} + \sqrt{2 \cdot R_V \cdot h_o + h_o^2} \\ &\approx \sqrt{2 \cdot R_V \cdot h_\emptyset} + \sqrt{2 \cdot R_V \cdot h_o} = \sqrt{2 \cdot R_V} \cdot (\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o}) \end{aligned}$$

hvor R_V er vertikalkurvens radius [m]

$h_\emptyset$ er øjenhøjden, altså den højde over vejoverfladen, som trafikantens øjne befinder sig i, [m]; $h_\emptyset \ll R_V$

h_o er objekthøjden, altså hvor langt over vejoverfladen det objekt, trafikanten skal reage på, rækker, [m]; $h_o \ll R_V$

Når den nødvendige sigtelængde, S , er kendt, følger heraf:



Figur 32. Oversigt (her stopsigt) i lang, konveks vertikalkurve med kurveradius R_v .

$$[72] \quad R_{v,Min} = \frac{S^2}{2 \cdot (\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o})}$$

Kort kurve

Formel [72] gælder, så længe sigtelængden er længere en vertikalkurvens bue, dvs. $S \geq R_v \cdot \alpha$.

Er der tale om en kort, konveks vertikalkurve, således at vertikalkurven er kortere end sigtelængden, giver udtrykket [72] radier, der er på den sikre side.

Betragtes situationen på Figur 33, hvor øjepunktet og objektpunktet befinder sig på hver sin side af vertikalkurvens bue, haves:

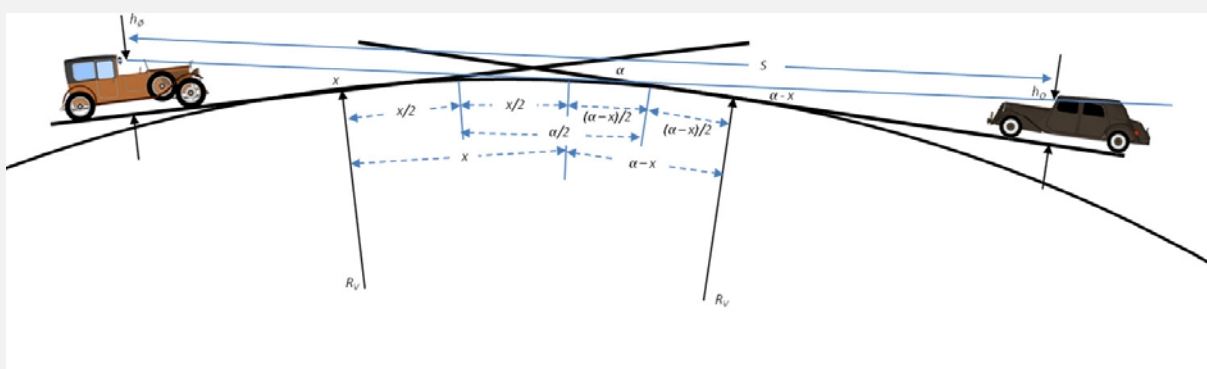
$$[73] \quad S = \frac{h_\emptyset}{\sin x} + \frac{1}{2} \cdot R_v \cdot \alpha + \frac{h_o}{\sin(\alpha - x)} \approx \frac{h_\emptyset}{x} + \frac{R_v \cdot \alpha}{2} + \frac{h_o}{\alpha - x}$$

hvor α er vinkelændringen, som vertikalkurven spænder over, [rad]

x er vinklen mellem sigtelinjen og den ene tangent [rad]

Den korteste sigtelinje findes i punktet, hvor:

$$[74] \quad \frac{dS}{dx} = \frac{h_\emptyset}{x^2} + \frac{h_o}{(\alpha - x)^2} = 0$$



Figur 33. Oversigt (her mødesigt eller overhalingssigt) i kort, konveks vertikalkurve med kurveradius R_v .

hvoraf:

$$[75] \quad x = \frac{\sqrt{h_\emptyset}}{\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_0}} \cdot \alpha$$

Herefter kan udtryk [73] omformes:

$$[76] \quad S = \frac{h_\emptyset}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_0}}{\sqrt{h_\emptyset}} + \frac{R \cdot \alpha}{2} + \frac{h_0}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_0}}{\sqrt{h_0}} = \frac{(\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_0})^2}{\alpha} + \frac{R \cdot \alpha}{2}$$

Når den nødvendige sigtelængde, S , er kendt, følger heraf:

$$[77] \quad R_{V,Min} = \frac{2}{\alpha^2} \cdot \left(\alpha \cdot S - (\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_0})^2 \right)$$

Grænsetilfældet, hvor $S \geq R_V \cdot \alpha$, indtræffer, når

$$[78] \quad \alpha = 2 \cdot \frac{(\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_0})^2}{S}$$

Sammenhængen mellem ændringen i længdegradient, ønsket sigtelængde og nødvendig (mindste) vertikalkurveradius kan, når øjenhøjden og objekthøjden er fastlagt, illustreres som i Figur 34.

Konkave vertikalkurver

I konkave (opad hule) vertikalkurver skal den nødvendige sigtelængde kunne ses under et brodæk eller et tunnelloft og skal tillige være oplyst ved kørsel i mørke.

Broer og tunneller

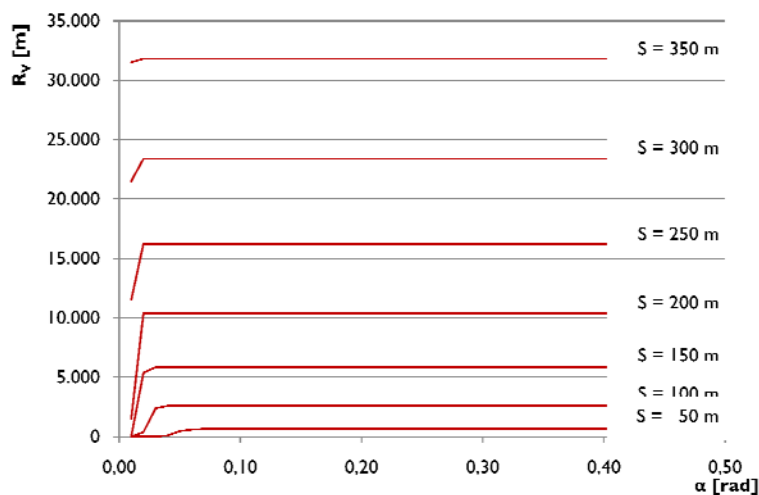
Den sigtelængde, der er til stede under et brodæk eller et tunnelloft, bestemmes på tilsvarende måde som ved kørsel gennem en konveks vertikalkurve.

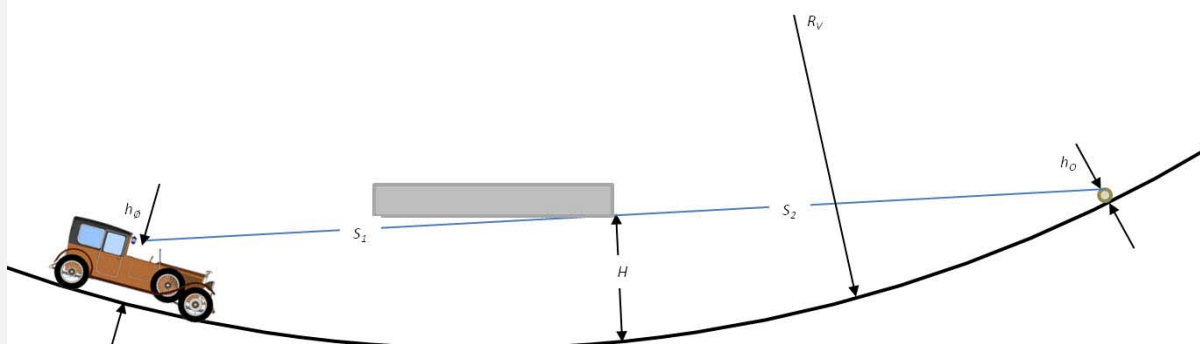
Betragtes en lang, konkav vertikalkurve, findes, jævnfør Figur 35:

$$[79] \quad S = S_1 + S_2 = \sqrt{(R_V - h_\emptyset)^2 - (R_V - H)^2} + \sqrt{(R_V - h_0)^2 - (R_V - H)^2} \\ \approx \sqrt{2 \cdot R_V \cdot (H - h_\emptyset)} + \sqrt{2 \cdot R_V \cdot (H - h_0)} = \sqrt{2 \cdot R_V} \cdot (\sqrt{H - h_\emptyset} + \sqrt{H - h_0})$$

Figur 34. Sammenhæng mellem radius, R_V , i konveks vertikalkurve, længdegradient-ændring, α , gennem kurven og nødvendig sigtelængde, S .

Beregning baseret på formlerne [72] og [77], idet øjenhøjde, $h_\emptyset = 1,00$ m, objekthøjde, $h_0 = 0,15$ m.





Figur 35. Oversigt (her stopsigt) i lang, konkav vertikalkurve med kurveradius R_V .

hvor R_V er vertikalkurvens radius [m]

$h_ø$ er øjenhøjden, altså den højde over vejoverfladen, som trafikantens øjne befinder sig i, [m]; $h_ø \ll R_V$

h_o er objekthøjden, altså hvor langt over vejoverfladen det objekt, trafikanten skal reagere på, rækker, [m]; $h_o \ll R_V$

H er frihøjden under brodækket eller tunnelloftet [m]

Når den nødvendige sigtelængde, S , er kendt, følger heraf:

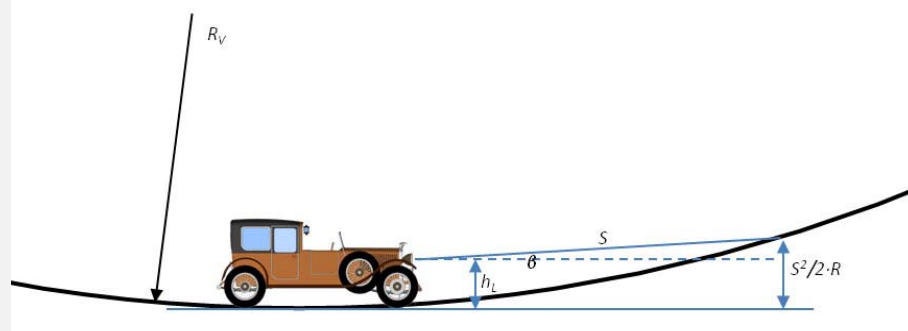
$$[80] \quad R_{V,Min} = \frac{S^2}{2 \cdot (\sqrt{H-h_ø} + \sqrt{H-h_o})^2}$$

Oplysning af vejoverfladen

Trafikanten skal afpasse sin hastighed, således det til stadighed vil være muligt at bringe køretøjet til standsning, hvis der skulle være en hindring på kørebanen.¹ Ved kørsel i mørke skal trafikanten derfor tilpasse sin hastighed til de sigtforhold, som køretøjets lygter sikrer.

Køres der på en ubelyst vej, skal fjernlyset kunne oplyse vejbanen mindst 100 m foran køretøjet, men kan med lygter med stor lysstyrke række længere, forudsat at sigtforholdene muliggør det.

Figur 36. Fjernlysets udstrækning ved kørsel i en lang, konkav vertikalkurve med kurveradius R_V .



¹ Jævnfør færdselsloven, se fodnote side 23.

Køres gennem en konkav vertikalkurve med radius R_V , vil, jævnfør Figur 36, lyskeglen ramme vejoverfladen i en afstand, S [m], der er bestemt af:

$$[81] \quad \frac{S^2}{2 \cdot R_V} = h_L + S \cdot \tan \beta \approx h_L + S \cdot \beta$$

hvor h_L er højden, lygterne anbragt i, [m]

β er lyskeglens hældning med køretøjets grundplan, [rad]

Heraf følger, når den nødvendige sigtelængde er kendt:

$$[82] \quad R_{V,Min} = \frac{S^2}{2 \cdot (h_L + S \cdot \beta)}$$

Hvor køretøjerne anvender nærløys, fx for ikke at blænde modkørende, er det et krav, at lysmørkegrænsen fra lygternes strålebundt har et fald på mindst 1 %. Nærløset vil således på retlinet vej højst kunne oplyse kørebanen i en afstand af $100 \cdot h_L$, hvilket sætter den øvre grænse for den hastighed, som det ifølge en naturvidenskabelig tolkning af færdselsloven vil være forsvarligt at køre med under disse forhold.

Øjen- og objekthøjder

Øjets opløsningsevne

De geometriske sammenhænge forudsætter at objektet, en genstand på kørebanen eller et modkørende automobil, kan ses. Det kræver, ud over at oversigten er fri, at den synlige del af objektet er så stort, at trafikantens øje kan opfatte objektet.

Det menneskelige øje har en opløsningsevne, der gør det muligt at skelne genstande, der har en udstrækning på mindst 1 bueminut ($1'$). Værdien gælder et »normalt« øje, men kan for de fleste også opnås ved at anvende korregerende briller.

Opløsningsevnen på 1 bueminut betyder eksempelvis, at et objekt på 100 m afstand i alle retninger vinkelret på synsstrålen skal have en synlig udstrækning på mindst:

$$[83] \quad 100 \cdot \frac{1^\circ}{60'} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 29 \text{ mm}$$

Ved vurderingen af de geometriske sammenhænge, skal man altså sikre sig, at de nødvendige sigtelængder er til stede i forhold til den situation, hvor objektet har en udstrækning, der svarer til øjets opløsning på den aktuelle afstand.

Øjen- og objekthøjder i danske vejregler

De værdier, som de danske vejregler angiver for øjen- og objekthøjder, er sammenstillet i Tabel 8.

Det fremgår, at der over årene er sket en naturlig tilpasning til vognparkens ændrede udseende, for så vidt angår øjenhøjde og køretøjshøjde. Udkast til vejregler fra 1964 (12) og motorvejsreglerne (13) pointerer, at de anførte køretøjshøjder er de beregningsmæssige værdier.

En værdi for øjenhøjden i et stort køretøj (til vurdering af sigt under brodæk eller lignende i en konkav vertikalkurve) introduceres først i de nye vejregler (14)(15); det er formentlig underforstået, at denne værdi også skal anvendes i de nye bestemmelser for motorveje (25)(26).

Genstandshøjden har ændret sig mest udtalt over årene. I bemærkningerne i 1943-vejreglerne (34) omtales genstanden som fx en væltet mast eller et træ. I de nye bestemmelser for motorveje (25)(26) repræsenterer genstandshøjden holdende køretøjer baglygtelys; bestemmelserne angiver i øvrigt en genstandshøjde på 1,0 m ved vurdering af oversigt i horisontalkurver.

Tabel 8. Danske vejreglers værdier for øjen- og objekthøjder. Genstandshøjde anvendes som objekthøjde i forbindelse med stopsigt, køretøjshøjde i forbindelse med mødesigt. Sikkerhedsafstand angiver den længde, køretøjet skal standse foran genstanden henholdsvis det modkørende køretøj.

Værdier angivet med – (tankestreg) fremgår ikke af pågældende vejregler.

Parameter	Vejregler 1943 (34)	Udkast 1964 (12)	Motorvejsregler (13)	Nye vejregler (14)(15)	Motorsregler 2009 (25)(26)
Øjenhøjde, h_o , personbil [m]	1,20	1,20	1,00	1,00	(1,00)
Øjenhøjde, h_o , lastbil [m]	–	–	–	2,50	(2,50)
Genstandshøjde, h_o , [m]	0,20	0,20	–	0,15	0,5
Køretøjshøjde, h_o , [m]	1,50	1,30	1,00	1,00	(1,00)

Opbremsning

På alle veje er det et udformningskrav, at trafikanten skal kunne nå at bremse for en forhindring på vejen. Det betyder, at trafikanten til hver en tid skal have udsyn til den vejstrækning, der gennemkøres indtil køretøjet er bragt til standsning. Den nødvendige oversigt kaldes stopsigt.

På vejstrækninger, hvor der kan forekomme modkørende trafik i et kørespor er det tillige et krav, at de to trafikanter skal kunne nå at bremse op for hinanden. Der skal altså overalt på strækningerne være oversigt, som svarer til, at begge trafikanter kan bringe sit køretøj til standsning. Den nødvendige oversigt kaldes mødesigt.

Standsnings-model

Opbremsning og standsning af et køretøj beskrives i reglen som bestående af to hovedfaser, reaktionsfasen og bremsefasen.

I den indledende reaktionsfase registrerer trafikanten behovet for at standse og handler ved at aktivere køretøjets bremses. Den tid, der medgår hertil, er reaktionstiden, t_R [s], og i løbet af denne tid fortsætter køretøjet med udgangshastigheden v_0 [m/s], og tilbagelængder en afstand, der kaldes reaktionslængden, L_R [m]:

$$[84] \quad L_R = v_0 \cdot t_R$$

I den efterfølgende bremsefase bringes køretøjet fra udgangshastigheden, v_0 , til en ny, lavere hastighed, v_N , evt. til standsning ($v_N = 0$). Køretøjets bevægelsesenergi, E_{kin} [J], reduceres med:

$$[85] \quad \Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot (v_0^2 - v_N^2)$$

hvor M er køretøjets masse [kg].

Opbremsningen forudsættes at ske ved udnyttelse af den fulde friktion, der kan etableres mellem køretøjets dæk og vejoverfladen i den aktuelle kørselssituation. Der skal her tages højde for vejens længdefald, tværfald og horisontalkurver har, samt for rullemodstanden.

Opbremsningen finder sted over et tidsrum, bremsetiden, t_B [s], og en afstand, bremselængden, L_B [m]. Bremselængden er den vejlængde, køretøjet tilbagelægger, fra bremsen aktiveres, til køretøjet standser. (31)

Den samlede standselængde, L_S [m], bestemmes således af:

$$[86] \quad L_S = L_R + L_B$$

De tre væsentligste udfordringer, der er forbundet med at fastlægge standseforløbet, er dels at fastlægge den udgangshastighed, v_0 , der skal tages i regning ved traceringen, dels at opstille et brugbart udtryk for den friktion, der optræder under bremseforløbet, dels bestemmelsen af reaktionstiden, t_R . Hastigheden er behandlet i tidligere afsnit, jævnfør Tabel 4. På en retlinet vej uden sidegradient regnes med den totale friktionskoefficient, μ_T , jævnfør udtryk [48] og [53].

Reaktionstid

Reaktionstiden er defineret som tiden fra en trafikant har fysisk mulighed for at opfatte en trafiksituation, der skal reageres på, og til reaktionen indtræder. (31) Det er en af de grundparametre, der er knyttet størst usikkerhed til.

Reaktionstiden er forskellig fra trafikant til trafikant og fra situation til situation. Værdien er derfor udtryk for et nationalt, politisk valg.

Forståelse af reaktionstiden

Herrstedt har i et litteraturstudium (47) sammenfattet tilgængelig viden om bremsereaktionstid og beslutningsreaktionstid.

Det er for det første væsentligt, at gøre sig klart, at der i løbet af reaktionstiden sker flere ting i hovedet på trafikanten:

- Trafikanten opfatter (detekterer) situationen
- Trafikanten tolker (identificerer) situationen
- Trafikanten beslutter, hvordan der skal reageres på situationen
- Trafikanten igangsætter sin reaktion på situationen

For det andet er det væsentligt at skelne mellem simple og mere komplekse situationer. I den simple situation giver beslutningen sig selv, og udfordringen er så hurtigt som muligt at opfatte og tolke situationen samt at iværksætte handlingen. I den mere komplekse situation vil trafikanten have flere handlingsalternativer, og opgaven rummer derfor også, at disse alternativer skal bedømmes og at der skal træffes et valg mellem dem, før handlingen sættes i gang. (47)

De bremsesituationer, der lægges til grund for traceringen af en vejstrækning, hører til de simple situationer.

For det tredje gælder, at reaktionstiden for uventede hændelser generelt vil være længere end ved forventede hændelser. Det sammenfattes (47), at undersøgelser foretaget i rigtig trafik viser, at reaktionstiden ved en simpel bremseaktion for en forventet hændelse vil være omkring 1,5 sekunder (90 %-fraktil) og op til 2,0 sekunder, mens den ved en uventet hændelse vil være omkring 2,5 sekunder (90 %-fraktil) og op til 2,7 sekunder.

For det fjerde viser litteraturstudiet (47), at der ikke synes at være nogen entydig, signifikant forskel på ældre og yngre bilister, når det drejer sig om de simple bremsereaktionssituationer, hvor der skal bremses for en uventet genstand eller reageres på aktivering på bremsekygter på den forankørende bil – derimod synes der at optræde en aldersbetinget forskel i flere, mere komplekse beslutningssituationer.

Overgangen mellem reaktion og bremsning

I de modeller, der anvendes ved tracering af en vejstrækning, er der anlagt en groft, simplificeret forløb: Under hele reaktionstiden sker der ikke en opbremsning; under hele bremsetiden virker bremsekræfterne maksimalt.

I detaljerede studier og beskrivelser af standsningsforløbet er det imidlertid nødvendigt mere præcist at fastlægge, hvornår reaktionen slutter, og bremsningen begynder, jævnfør Figur 37. Er det når trafikantens fod rører bremsepedal, er det når, bremsepedalen er aktiveret så meget, at bremsen »tager fat«, eller er det, når trykket på bremsepedalen har fået bremsen til at virke på maksimalt niveau?

Figur 37. Simplificeret fremstilling af differentieret standsningsforløb, hvor der optræder fire faser.

I løbet af reaktionstiden, t_R , opfatter og tolker trafikanten situationen, beslutter at bremse og flytter sin fod fra speederen til bremsepedalen. Køretøjet tilbagelægger imens afstanden $L_1 - L_0$.

Når trafikanten begynder at trykke bremsepedalen ned, går der et tidsrum, inden bremsen har nået sit maksimale niveau. Dette tidsrum betegner modellen til-maks-bremsetiden, t_{B1} , og tidsrummet har typisk en varighed på 0,3-1,0 s, afhængig af trafikantens adfærd og køretøjets bremsesystem.

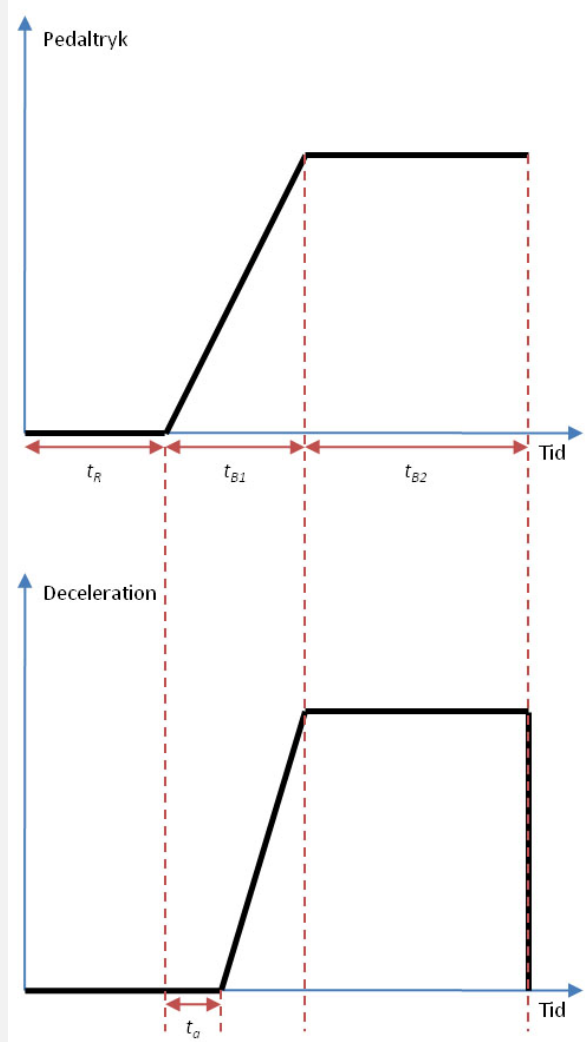
I løbet af den første del af til-maks-bremsetiden, trykker trafikanten bremsepedalen ned, indtil bremsen begynder at »tage fat«. Tiden, der medgår hertil kan kaldes bremseinitieringstiden, t_o , og den angives, at ligge på typisk 0,1-0,4 s. Køretøjet tilbagelægger i dette tidsrum afstanden $L_2 - L_1$.

I den resterende del af til-maks-bremsetiden øges trykket på bremsepedalen, indtil bremsen når sit maksimale niveau. Køretøjet tilbagelægger i dette tidsrum afstanden $L_3 - L_2$.

Endelig forløber opbremsningen med fuldt aktiveret bremse i tiden t_{B2} over afstanden $L_4 - L_3$, indtil køretøjet er bragt til standsning, eller indtil der er opnået en tilstræbt ny, lavere hastighed.

Bemærk, at det i henhold til definitionen af reaktionstid må gælde, at bremsetiden, t_B , fastsættes som: $t_B = t_{B1} + t_{B2}$, også selvom den fysiske bremselængde i virkeligheden alene udgør afstanden $L_4 - L_2$.

Efter (48)



Reaktionstid i danske vejregler

De danske vejregler fra 1943 (34) angiver, at reaktionstiden kan sættes sekunder s til 0,75 ved hastighedsfaktorer på 100 km/h og 90 km/h, og til 1 sekund ved lavere hastigheder. Vejreglerne bemærker i tilknytning hertil, at reaktionstiden normalt vil »kunne sættes til 1 Sek., men under Hensyn til at det vil kunne forudsættes, at Kørsler med de meget store Hastigheder er øvede og netop paa Grund af den store Hastighed særligt koncentrerer sig om Kørslen, kan det i det mindste for den ene Vogns Fører tillades at regne med kun ½ Sek. Reaktionstid eller gennemsnitlig ¾ Sek. for dem begge.«

I udkast til vejregler fra 1964 (12) skelnes mellem opfattelsestiden og reaktionstiden. Værdierne angives ikke separat, men summen fastsættes til 1,5 sekunder på veje, hvor hastigheden er 50 – 100 km/h, og til 2 sekunder på veje med hastighed på 120 km/h.

Motorvejsreglerne (13) definerer opfattelsestiden som intervallet fra det øjeblik, en trafikal hindring eller afmærkning er teoretisk opfattelig for en trafikant, til det tidspunkt, hvor trafikanten har registreret forhindringen, bedømt situationen og besluttet sig til handling. Motorvejsreglerne definerer reaktionstiden som intervallet fra sidstnævnte tidspunkt til det øjeblik, hvor trafikanten har iværksat sin handling, og den implicerede mekanik netop er trådt i funktion.

Motorvejsreglerne anfører, at den tid der medgår til bedømmelse af situationen er ubetydelig, hvis handlingen er refleksbetonet; men at denne tid på den anden side under visse omstændigheder kan udgøre den væsentligste del af opfattelsestiden. Reglerne fastsætter summen af opfattelsestid og reaktionstid til 2,5 sekunder, idet det anføres, at værdier eventuelt kan være 1,0 for udpræget bytrafik.

Tabel 9. 1943-vejreglernes værdier for reaktions-, bremse- og standselængde ved forskellige hastighedsfaktorer. Bemærk betydningen af forskelle i reaktionstider og bemærk, at de anvendte friktionskoefficienter er stigende med stigende hastighed. (34)

Hastighedsfaktor V [km/h]	Reaktionslængde L_R [m]	Bremselængde L_B [m]	Standselængde L_S [m]
100	21	98	119
90	19	79	98
80	22	72	94
70	19	64	83
60	17	57	74
50	14	39	53
40	11	25	36

I de seneste danske vejregelforslag (14) anvendes en reaktionstid på 2,0 sekunder på frie strækninger. Denne værdi indgår også i den beslutning, som Vejreglerådet i 2009 traf om revision af standselængder på motorveje. (25)

[87] $t_R = 2,0$ sekunder

Stopsigt

Stopsigt er den sigtelængde, der sikrer, at trafikanten kan nå at se, opfatte og reagere på en hindring, således at køretøjet er bragt til standsning, før hindringen.

Stopsigtelængde, S_{Stop} , skal være til stede overalt på alle veje, og den skal være lige så stor som standselængden, L_S , ved kørsel med den aktuelle hastighed:

[88] $S_{Stop} = L_{S(V_{85\%})}$

Gennem konvekse vertikalkurver bedømmes stopsigtelængden for en personbil ved. Gennem konkave vertikalkurver bedømmes stopsigtelængden såvel for en personbil som for en lastvogn, hvor trafikantens øjenhøjde er større end i en personbil. I alle tilfælde, vurderes stopsigtelængden i forhold til objekthøjden for en fast genstand, jævnfør værdier i Tabel 8.

Stopsigtelængder i danske vejregler

De danske vejregler fra 1943 (34) angiver reaktionslængde, bremselængde og standselængde for hastighedsfaktorer i intervallet fra 100 km/h til 40 km/h, jævnfør Tabel 9. Længderne er beregnet i overensstemmelse med de anførte formler og de gjorte fysiske forudsætninger. Bemærk, at der er tillagt en sikkerhedsafstand på 5 m.

Udkast til vejregler (12) angiver de i Tabel 10 anførte værdier for standsning af et køretøj. Værdierne baserer sig på de anførte fysiske forudsætninger, som udkastet gør.

Motorvejsreglerne (13) rummer tabeller over decelerationslængder for hastighedsnedsættelser i trin à 10 km/h fra udgangshastigheder op til 100 km/h. Længdegradienten er differentieret i trin à 5 ‰ i intervallet fra 50 ‰ fald til 50 ‰ stigning.

Motorvejsreglernes decelerationslængder angives med og uden indledende motorbremsning af 2 sekunders varighed. Tabellerne er rettet mod bedømmelse af decelerationsstrækninger på ramper; der er derfor ikke indregnet reaktionstid, ligesom der er regnet med en komfortabel decelerationskoefficient.

Tabel 10. Standselængder i henhold til udkast til vejregler fra 1964. (12). Der angives ingen værdi for hastigheden 110 km/h.	V [km/h]	120	110	100	90	80	70	60	50
	L_S [m]	210	-	120	100	85	85	70	40

Tabel 11. De nye danske vejreglers stopsigtelængder ved kørsel på retlinet vej med konstant længdegradient. (14). Værdier for 130 og 120 km/h skal ifølge rettelsesbog tilføjes (16), men er endnu ikke indarbejdet i vejreglerne. Højre kolonne angiver Vejregelrådets nye standselængder på motorveje (vandret vej). (25)/(26)

Ønsket hastighed V_0 [km/h]	Stopsigtelængde S_{Stop} [m] (14)			Standselængde
	50 ‰ stigning	Vandret vej	50 ‰ fald	Motorvej. Ny
130				248
120				217
110	275	311	364	187
100	233	262	303	160
90	196	219	250	
80	164	181	205	
70	135	148	165	
60	109	119	132	
50	87	94	103	
40	68	72	79	
30	51	54		59

De nye danske vejregler (14) angiver værdier for standselængden på lige vej, med hældning på 50 ‰ stigning, 0 ‰ og 50 ‰ fald. Værdierne er gengivet i Tabel 11.¹ og på Figur 38.

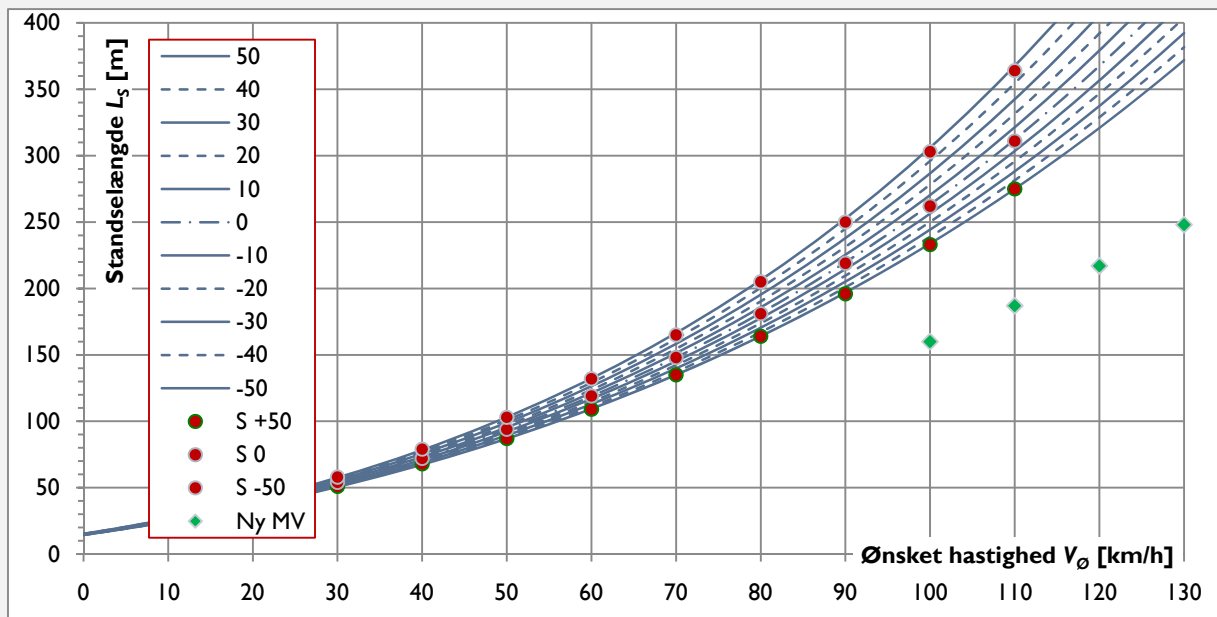
Vejreglernes stopsigtværdier er baseret på udnyttelse af den totale friktionskoefficient, μ_T , og ved hastigheden $V_{85\%}$, jævnfør formel [5]. Der indregnes således et sikkerhedstillæg.

Vejregelrådet har i 2009 revideret standselængderne for motorveje, (25) (26). Værdierne for vandret vej er anført i Tabel 11 og vist på Figur 38. Det fremgår, at der er tale om en betydelig reduktion af stopsigtelængden sammenlignet med de værdier, vejreglerne hidtil har angivet.

En del af denne reduktion skyldes, at standselængden beregnes ud fra kørsel med hastigheden V_0 , således at der ikke længere indgår et sikkerhedstillæg på motorvejene. En anden del af reduktionen skyldes, at genstandshøjden er øget, jævnfør Tabel 8.

¹ Vejreglerne angiver tillige tilsvarende værdier for standselængden på kurvet vej, hvor friktionskoefficienten skal reduceres for at tage hensyn til den sideacceleration, der skal modvirkes. Disse standselængder er behandlet i nedenstående afsnit »

Vejreglerne opregner mindsteradierne for konkvekse vertikalkurver henholdsvis for konkave vertikalkurver under broer, jævnfør Tabel 15. Værdierne baserer sig på de fysiske forudsætnin-ger, som vejreglerne gør sig.



Figur 38. Numerisk beregnede stopsigtelængder på retlinet vej med konstant længdegradient. Beregning på grundlag af friktionskoefficienter, der er eksponentiel afhængige af hastigheden som angivet i udtryk [53] og bestemt numerisk, jævnfør udtryk [60]-[61]. Vejreglernes værdier, jævnfør Tabel 11, er indsat som røde punktmarkeringer. Vejreglrådets nye standse-længder, gældende for motorveje (vandret vej), er vist med grønne punktmarkeringer.

Mødesigt

Mødesigt er den sigtelængde til, der er nødvendig, for at to trafikanter, der kører mod hinanden, kan nå at se, opfatte og reagere på hinanden, således at begge køretøjer er bragt til standsning, før de mødes.

Mødesigtelængde skal være til stede overalt på vejstrækninger, hvor der kan optræde modkørende trafik i samme vognbane. Det er altså ikke nødvendigt at vurdere mødesigt på motorveje, og på vejstrækninger, hvor det ikke skal være tilladt at overhale.

Mødesigtelængden, $S_{Møde}$, bedømmes for personbiler ved den ønskede hastighed, idet objekthøjden fastsættes som køretøjshøjden for en modkørende personbil. Mødesigtelængden vil således være dobbelt så stor som standselængden ved den ønskede hastighed, $V_{\emptyset}$:

$$[89] \quad S_{Møde} = 2 \cdot L_{S(V_{\emptyset})}$$

Længdegradientens forskellige indvirkning på modkørende køretøjer, der bevæger sig op henholdsvis ned ad en bakke, tages i reglen ikke i regning; i stedet beregnes begge køretøjers standselængder som ved kørsel på vandret vej, idet der afrundes. I konvekse kurver er den fejl, der herved begås, er til den sikre side.

Mødesigtelængder i danske vejregler

De danske vejreglers værdier for mødesigtelængder er anført i Tabel 12.

I de ældre danske vejregler er mødesigtelængderne den dobbelte værdi af de anførte stopsigtelængder, jævnfør Tabel 9 og Tabel 10.

I de seneste forslag til vejregler (14) gælder denne sammenhæng ikke, idet mødesigtelængden beregnes ud fra $V_{\emptyset}$, mens stopsigtelængden beregnes ud fra $V_{85\%}$.

Beregningerne baserer sig i øvrigt på de anførte værdier for øjen- og køretøjshøjder, jævnfør Tabel 8.

Afmærkning af manglende stopsigt og mødesigt

De foranstående beregnede stop- og mødesigt anvendes i forbindelse med vejens tracéring.

Afmærkning af manglende eller dårlige oversigtsforhold opsættes efter de bestemmelser og de afstande, der er angivet i bekendtgørelsen om anvendelse af afmærkning (49). Det gælder fx stopsigt i forbindelse med brugen af advarselstavle A11 »Farligt veikryds«, forbudstavle C51 »Overhaling forbudt« og ved etablering af længdeafmærkning med Q44 »Spærrelinje«.

Overhaling

Hvor der skal være overhalingsmulighed, skal trafikanten kunne se, opfatte og reagere på eventuelle hindringer eller modkørende trafik på den aktuelle delstrækning så betids, at det er muligt at afslutte eller afbryde overhalingsmanøvren.

Tabel 12. Mødesigtelængder, $S_{Møde}$ [m], i de danske vejregler, angivet for hastighedsfaktor, dimensioneringshastighed henholdsvis ønsket hastighed. Værdier angivet med – (tankestreg) fremgår ikke af pågældende vejregler.	Hastighed [km/h]	Vejregler 1943 (34)	Udkast 1964 (12)	Nye vejregler (14)(15)	
	100	240	240	–	
	90	200	200	290	
	80	190	170	240	
	70	160	170	190	
	60	140	140	150	
	50	100	80	110	
	40	70	–	80	
	30	–	–	50	

Tabel 13. Overhalingssigt i henhold til 1964-udkastet til vejregler. (12).	Overhalende køretøjs hastighed [km/h]	100	90	80
	Modkørende køretøjs hastighed [km/h]	100	90	80
	Overhalede køretøjs hastighed [km/h]	80	70	60
	Overhalingssigtelængde, S_{Over} [m]	640	430	280

Overhalingssigtelængde, S_{Over} , skal være til stede overalt på de delstrækninger, hvor der kan optræde modkørende trafik i samme kørebane, og hvor man ønsker, at trafikanterne fortrinsvis skal gennemføre deres overhalingsmanøvre. Overhalingssigt er altså ikke relevant på motorveje.

Tilstedeværelse af overhalingssigt er en kvalitet ved vejudformningen, og i reglen tilstræber man, at der er overhalingssigt på en passende stor andel af vejstrækningen og med passende lille afstand mellem de delstrækninger, der giver overhalingsmulighed. Overhalingsmulighed fordrer dog samtidig, at den modkørende trafiks intensitet er passende lav.

Overhalingsmodeller

Overhalingssigtelængden bedømmes for personbiler ved den ønskede hastighed. Bedømmelsen baserer sig på særskilte modeller.

Modellerne er typisk mere komplekse end de modeller, der knytter sig til fastlæggelsen af stop- og mødesigt. For det første involverer overhalingsmodellerne (mindst) tre trafikanter, den overhalende, den modkørende og den eller de, der bliver overhalet. For det andet kan overhalingsmodellerne rumme det moment, at den overhalende trafikant indtil et vist tidspunkt under overhalingen, kan vælge at afbryde manøvren.

Overhalingssigt i ældre danske vejregler

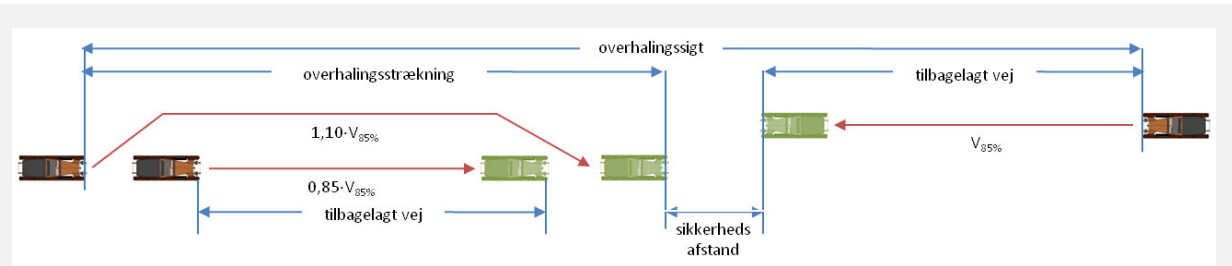
I 1964-udkastet til vejregler (12) er anvendt en forholdsvis simpel model, nemlig at det overhalende og det modkørende køretøj begge har en hastighed, der er 20 km/h højere end det overhalende køretøjs. Udkastet angiver de overhalingssigtelængder som fremgår af Tabel 13.

Overhalingssigt i nye danske vejregler

De seneste danske vejregler (14) definerer overhalingssigt som den længde, som 85 % af trafikanterne ønsker for at begynde og gennemføre en overhaling. De værdier, vejreglerne anfører, er beregnet ved hjælp af en tysk beregningsmodel. Vejreglerne anfører, at danske adfærdsstudier bekræfter den tyske beregningsmodel.¹

Den tyske beregningsmodel, der henvises til, er formentlig den, der er anvendt i de samtidige tyske vejregler (37).² Denne model rummer følgende delelementer, jævnfør Figur 39:

Det modkørende køretøj, forudsættes under hele manøvren at have hastigheden $V_{85\%}$.



Figur 39. Model for overhaling efter de tyske vejregler. Efter (37).

Tabel 14. Overhalingssigtelængder i henhold de seneste danske vejregler. (14)	V_0 [km/h]	80	70	60	50	40	30
	S_{Over} [m]	625	575	525	500	475	450

Det køretøj, der overhales, forudsættes under manøvren at køre med en hastighed, der er 85 % af $V_{85\%}$ -værdien på vejstrækningen.

Det overhalende køretøj, antages at have en udgangshastighed på $V_{85\%}$, men øger under manøvren sin hastighed til 110 % af $V_{85\%}$ -værdien. Før overhalingen påbegyndes holder køretøjet en given afstand til det køretøj, der skal overhales. Ved overhalingens afslutning holdes ligeledes en given afstand til det overhalede køretøj, og der er tillige en vis mindste sikkerhedsafstand til det modkørende køretøj.

Sikkerhedsafstandene er ikke oplyst, men de afledte overhalingssigtelængder er som angivet i Tabel 14.

Retardation og acceleration

Stigningsforholdene på bakken påvirker også køretøjets hastighed. Ved kørsel op ad en bakke, vil tyngdekraften qua længdegradienten have en bremsende effekt, som motorens trækraft (så vidt muligt) skal overvinde. I det omfang det ikke er muligt, vil køretøjet miste hastighed på strækningen (retardation)

Ved kørsel ned ad bakke, vil længdegradienten bevirke, at tyngdekraften er med til at accelerere køretøjet.

Der betragtes en bakke med længden L og med en konstant længdegradient $s = \tan \alpha$. Der ses bort fra de vertikale afrundingskurver ved foden og ved toppen af bakken, og det antages, at

¹ Vejreglerne angiver desværre ikke en kilde til disse adfærdsstudier.

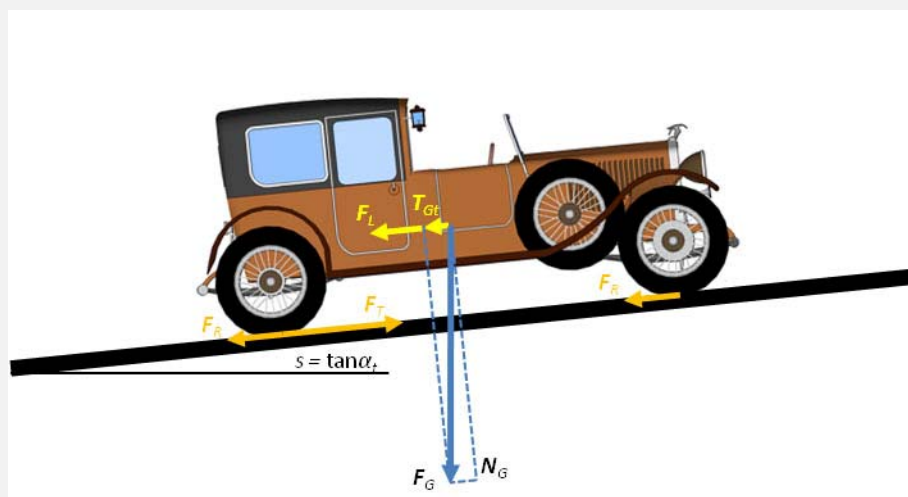
² Vejreglerne angiver desværre ikke beregningsmodellen nærmere; formodningen hviler på, at de danske vejreglers overhalingssigtelængder har værdier, som er samstemmende med de tyske vejreglers.

kørebanens tværsnit er vandret ($i = \tan \alpha_r = 0$). Det forudsættes, at den nødvendige tangentielle friktionskraft, F_{Ft} , kan mobiliseres.

Optrædende kræfter

De kræfter, der påvirker køretøjet i længdesnitsplanet, altså parallelt med bevægelsesretningen, er, jævnfør Figur 40, den lodrette tyngdekraft, F_G , køretøjets trækraft, F_T , luftmodstanden, F_L , vejbelægningens reaktionskraft, F_N , samt rullemodstanden, F_R .

Figur 40. Kraftpåvirkningen på et køretøj i bevægelse op ad en bakke – ud over tyngdekraften, F_G , og dens komponenter betragtes rullemodstanden, F_R , luftmodstanden, F_L , køretøjets trækraft, F_T , samt vejbefæstelsens normalkraft, $F_N = N_G$



Retardation

Ved kørsel op ad bakke, er det dynamiske krav, at et køretøj, der ved bakkens fod har en vis hastighed, v , skal kunne passere bakken, uden at køretøjets hastighed falder under en given værdi.

Betragtningen er relevant, hvor der er tale om en så lang og stejl bakke, at det skal vurderes, om der er behov for anlæg af et ekstra spor, som tunge, langsomme køretøjer kan betjene sig af op ad bakken.

Ligevægtsligningerne er, for så vidt angår de normale kræfter som angivet i udtryk [19], og for så vidt angår de tangentielle kræfter som angivet i udtryk [21]. Det betyder, at størrelsen af den optrædende normalreaktion og af den resulterende retardation, a , af køretøjet kan skrives:

$$[90] \quad F_N = M \cdot g \cdot \cos \alpha_t$$

$$[91] \quad a = \frac{1}{M} \cdot (F_T - F_L - F_R) - g \cdot \sin \alpha_t = \frac{p_r}{v} - \frac{C_L \cdot A \cdot v^2}{M} - \mu_R \cdot g \cdot \cos \alpha_t - g \cdot \sin \alpha_t$$

idet udtrykkene [10], [11] og [12] er indsat, og idet:

- M er køretøjets masse [kg]
- p_r er køretøjets motoreffekt pr. vægtenhed [W/kg]
- C_L er køretøjets luftmodstandskoefficienten [kg/m³]
- A er køretøjets frontareal [m²]
- μ_R er rullemodstands-koefficienten [-]

Da accelerationen, a , er den tidsafledede af hastigheden, v , kan udtryk [91] håndteres ved numerisk integration, når de karakteristiske størrelser for køretøjet er kendt.

Ved den numeriske betragtning, ses på så små tidsintervaller, Δt , at hastigheden med rimelighed kan anses for at være konstant inden for det enkelte inkrement. Hastighedsændringen mellem to inkremente bestemmes da af:

$$[92] \quad \Delta v = v_n - v_{n-1} = \left(\frac{p_r}{v_{n-1}} - \frac{C_L \cdot A \cdot v_{n-1}^2}{M} - \mu_R \cdot g \cdot \cos \alpha_t - g \cdot \sin \alpha_t \right) \cdot \Delta t$$

og den akkumulerede, tilbagelagte vejstrækning, L_n , bestemmes af:

$$[93] \quad L_n = \sum_n \frac{v_n + v_{n-1}}{2} \cdot \Delta t$$

Afbildes sammenhørende værdier for tilbagelagt vejlængde og opnået hastighed fremkommer en unik retardationskurve, der gælder for det pågældende typekøretøjs køretøj ved den aktuelle længdegradient, jævnfør Figur 41.

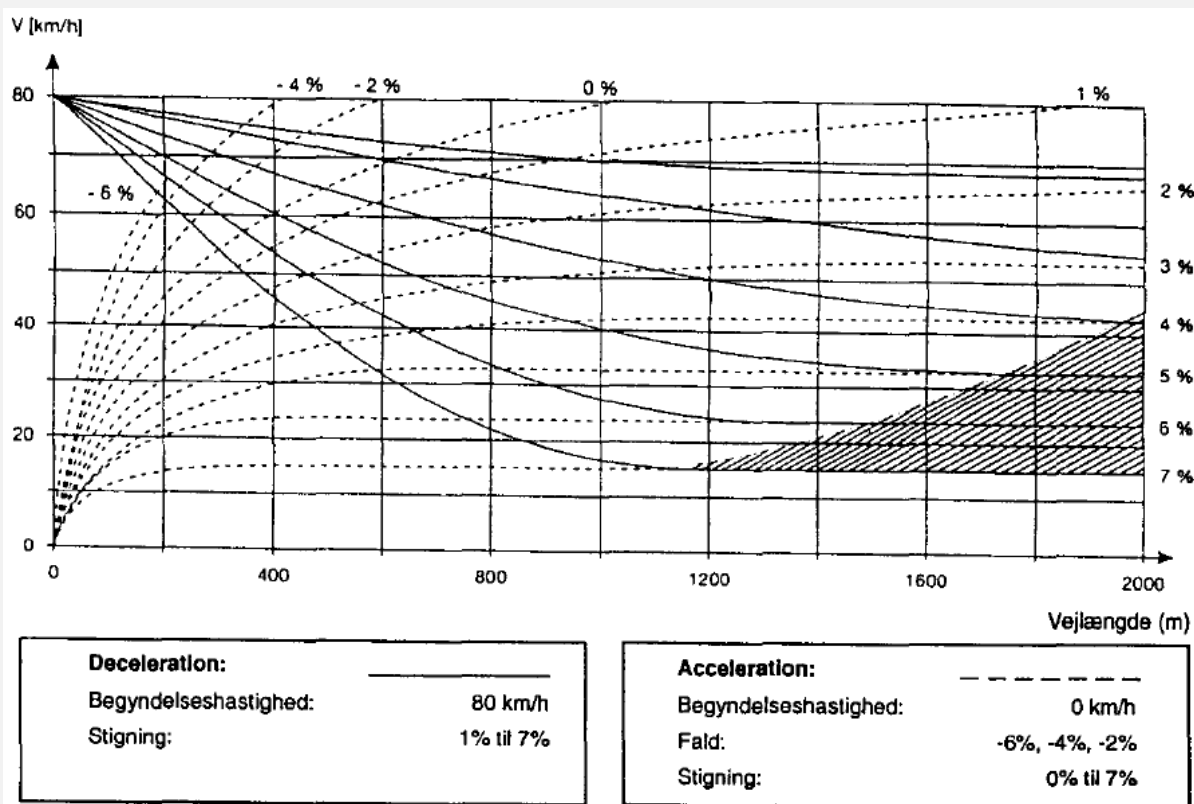
Acceleration

Ved kørsel ned ad bakke, er betragtningen helt tilsvarende.

Denne situation er relevant ved fastlæggelse af længden af tilslutningsramper ved motorveje, således at det sikres, at alle køretøjer er oppe i passende hastighed, før de fletter ind i motorvejens trafikstrøm.

Situationen er ligeledes relevant, når det skal afgøres hvor langt et ekstra spor skal fortsætte over en bakketop, således at de tunge, langsomme køretøjer, der benytter det ekstra spor, kan have genvundet en hastighed, der modsvarer den øvrige trafik.

Ligevægtsligningerne er som angivet i udtryk [90] og [91], idet længdegradienten, $s = \tan \alpha_t$, som nævnt regnes positiv ved stigning og negativ ved fald. Den numeriske løsning, angivet i udtryk [92] og [93] kan ligeledes anvendes.



Figur 41. Hastighedsprofil for de danske vejreglers dimensionsgivende lastbil afhængig af gradienten. Fra (14).

Retardations- og accelerationsstrækninger i danske vejregler

De ældre danske vejregler giver ikke egentlige anvisninger vedrørende fastsættelse af retardations- og accelerationsstrækningernes størrelse; men rummer alene kvalitative udsagn.

1943-vejreglerne (34) angiver i tilknytning til de anførte maksimalstigninger på 35 ‰ henholdsvis 50 ‰ »De foreskrevne Maksimalstigninger skal ikke betragtes som absolutte, da det ikke for moderne Motorvogne spiller nogen større Rolle, om Stigningen er lidt større eller mindre, medens Længden af Stigningen derimod kan være afgørende, og det skal anføres, at lagttagelser foretaget i Sverige har vist, at Lastautomobiler i Almindelighed skal skifte Gear paa en stigning paa 35 promille, naar denne er over 750 m lang, og paa en stigning paa 50 promille, naar denne er over 200 m lang. Personvogne behøver i Almindelighed ikke at skifte Gear paa de her foreskrevne Maksimalstigninger.«

1964-udkastet (12) anfører tilsvarende: »Hvor det er nødvendigt at anvende disse eller undtagelsesvis større stigninger på så lange strækninger, at de erfaringsmæssigt tvinger den tunge trafik til at nedsætte kørehastigheden væsentligt, bør motorveje forsynes med en krybebane for langsomt kørende trafik eventuelt også på faldstrækninger. Det kan også på 2-sporede veje med stærk og tung trafik blive nødvendigt at anlægge krybebaner.«

Såvel 1943-vejreglerne som 1964-udkastet rummer dog anvisninger om, hvordan stigninger i længdeprofilen skal afpasses til længderne på cykelstier i eget tracé.

Motorvejsreglerne (13) introducerer med tanke på motorvejenes til- og frakørselsramper et beregningsgrundlag for længden af accelerations og decelerationsstrækninger. På tilkørselsramper er udgangspunktet, at indfletningshastigheden kan tillades at være 5-15 km/h mindre end gennemsnitshastigheden i motorvejens yderste kørespor. På denne baggrund anføres en indfletningshastighed på 90 km/h, idet der dog tillades mindre hastigheder, hvor motorvejens længdeprofil i kørselsretningen har en stigning på over 20 ‰. Beregningen af accelerationslængden tager udgangspunkt i personbilers ydeevne og det anføres, at værdierne tilgodeser hovedparten af den (den gang) almindeligst anvendte personbiler.

Det seneste vejregelforslag (14)(15) tager afsæt i de retardations- og accelerationskurver, der fremgår af Figur 41.

Vejregelforslagets vejledninger tager udgangspunktet i, at den tunge trafiks hastighed vil blive nedsat væsentligt på lange strækninger med stigning over 35 ‰. Derfor bør det på større veje overvejes at anlægge et ekstra kørespor op ad bakken, hvis hastighedsnedsættelsen for lastbiler er større end 20 km/h. Det ekstra kørespor bør forløbe over den strækning, hvor hastigheden er reduceret med 10 km/h eller mere.

Bemærk, at kurverne i Figur 41 alene gælder for den dimensionsgivende lastbil, som vejregelforslaget anvender.¹

Komfort

Passage af vertikalkurver opleves som ubehagelig, når den såkaldte centrifugalacceleration bliver for stor. Den vertikale centrifugalacceleration, a_v [m/s²] er den accelerationspåvirkning, som trafikanten oplever, når køretøjet med hastigheden v [m/s] kører gennem en vertikalkurve med radius R_v [m]:

¹ Vejregelforslaget redegør desværre ikke for den anvendte størrelse af rullemodstanden, μ_R , eller for størrelsen af de karakteristiske størrelser (motoreffekten, p_r , luftmodstandskoefficienten, C_L , frontarealet, A , og massen, M) der er knyttet til den dimensionsgivende lastbil.

$$[94] \quad a_v = \frac{v^2}{R_v}$$

Heraf følger, at der gælder et minimumskrav til vertikalkurvens størrelse:

$$[95] \quad R_{v,Min} = a_{v,till} \cdot v^2$$

De ændre danske vejregler angiver ikke en værdi for den tilladelige centrifugalaccelerationen, men af ældre lærebøger, fx (50), fremgår, at parameteren har været inddraget i praksis. De nye danske vejregler (15) angiver i overensstemmelse med denne ændre praksis, at centrifugalaccelerationen, såvel i konvekse som i konkave vertikalkurver, ikke bør overstige 0,5 m/s²:

$$[96] \quad a_{v,till} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

Med denne værdi, vil ændringerne i hjultrykkene være i størrelsesordenen $a_{v,till}/g \approx 5 \%$, og der vil ikke være risiko for brud i køretøjets affjedringssystem, ligesom der ikke vil være behov for vertikale overgangskurver for at sikre en komfortabel, jævn ændring i den vertikale kraftpåvirkning.

Vertikalkurveradier

Kurveradierne i længdeprofilets skal vælges, således at alle de ovenfor nævnte hensyn er tilgodeset i relevant omfang ved den aktuelle hastighed. Der skal altså altid være stopsigt ved $V_{85\%}$ og komfortabel kørsel ved V_0 . Hvis der kan optræde modkørende trafik, skal der tillige være mødesigt ved V_0 , og der på en passende stor den af strækningen være overhalingssigt, ligeledes ved V_0 . Den nævnte oversigt skal kontrolleres såvel i vertikal- som i horisontalkurver.

Tabel 15. Mindste kurveradier [m] i lange konvekse vertikalkurver henholdsvis i konkave vertikalkurver under bro eller lignende, i henhold til det seneste danske vejregelforslag (15).

Hastighed [km/h]	Konvekse vertikalkurver				Konkave vertikalkurver under bro			
	Stopsigt	Mødesigt	Overhaling	Komfort	Stopsigt	Mødesigt	Overhaling	Komfort
Beregning	$V_{85\%}$	V_0	V_0	V_0	$V_{85\%}$	V_0	V_0	V_0
110	25.100			1.900	4.200			1.900
100	17.900			1.600	3.000			1.600
90	12.500	10.600		1.300	2.100	3.900		1.300
80	8.600	7.200	48.900	1.000	1.500	2.700	18.200	1.000
70	5.700	4.600	41.400	800	1.000	1.700	15.400	800
60	3.700	2.900	34.500	600	700	1.100	12.800	600
50	2.300	1.600	31.300	400	400	600	11.600	400
40	1.400	800	28.300		230	300	10.500	
30	800	400			130	120		

Vejreglerne (15) opregner mindsteradierne for konvekse vertikalkurver henholdsvis for konkave vertikalkurver under broer, jævnfør Tabel 15. Værdierne baserer sig på de fysiske forudsætninger, som vejreglerne gør sig.

Kørseldynamik i linjeføringen

Det dynamiske krav er, at et køretøj med konstant hastighed skal kunne gennemkøre vejen uden at komme i fare for at skride ud, og at trafikanten skal opfatte kørslen som komfortabel.

Optrædende kræfter

Der betragtes den situation, hvor et automobil kører med en given hastighed, v , i en vandret horisontalkurve med en given kurveradius, R_H , og med en vejoverflade med en given sidehældning, $i = \tan\alpha_r$.

Der gøres den simplificerende forudsætning, at køretøjets tyngdepunktskurve følger linjeføringens horisontalkurve.

De kræfter, der påvirker køretøjet i tværsnitsplanet, altså vinkelret på bevægelsesretningen, er, jævnfør Figur 42, den lodrette tyngdekraft, F_G , den vandret virkende centripetalkraft, F_C , samt vejbelægningens reaktionskraft, F_N , og friktionskræfternes resulterende radiale komponent, F_{Fr} .

Ligevægtsligningerne er, for så vidt angår de normale kræfter som angivet i udtryk [20], og for så vidt angår de radiale kræfter som angivet i udtryk [22]. Det betyder, at den optrædende normalreaktion og den nødvendige radiale friktionskraft kan skrives:

$$[97] \quad F_N = M \cdot g \cdot \cos\alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_H} \cdot \sin\alpha_r$$

$$[98] \quad F_{Fr} = -M \cdot g \cdot \sin\alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_H} \cdot \cos\alpha_r$$

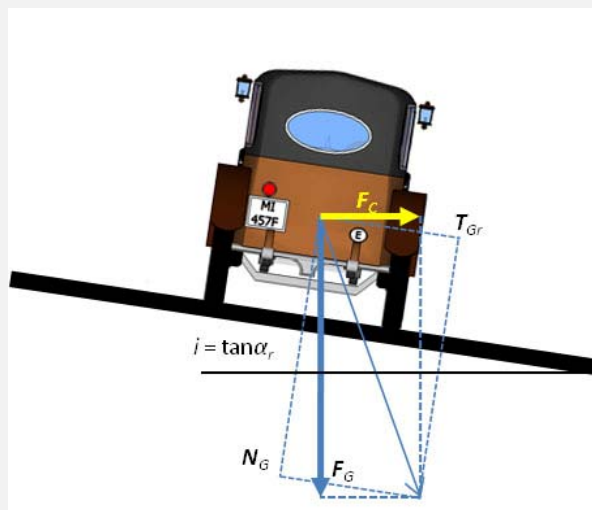
hvor M er køretøjets masse [kg]

g er størrelsen af tyngdeaccelerationen [m/s^2]

α_r er vinklen mellem det vandrette plan og vejoverfladen i tværsnittet; $\tan\alpha_r = i$

v er køretøjets hastighed [m/s]

R_H er den øjeblikkelige kurveradius [m]



Figur 42. Kraftpåvirkningen på et køretøj i bevægelse gennem en vandret kurve – ud over tyngdekraften, F_G , betragtes centripetalkraften, F_C , de radiale friktionskræfter mellem dæk og vejoverfladen, F_{Fr} samt vejbefæstelsens normalkraft, F_N .

Udskridning og væltning

Udskridning

For at køretøjet ikke skal skride ud, kræves det, at der kan etableres en sideværts friktionskraft, som er mindst lige så stor som radialkraften. Sammenholdes udtryk [97] og [98] med udtryk [17] fås uligheden:

$$[99] \quad \begin{aligned} F_{Fr} &= -M \cdot g \cdot \sin \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_H} \cdot \cos \alpha_r = \mu_s \cdot \left(M \cdot g \cdot \cos \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_H} \cdot \sin \alpha_r \right) \\ &\leq \mu_{r,\max} \cdot \left(M \cdot g \cdot \cos \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_H} \cdot \sin \alpha_r \right) = \mu_{s,\max} \cdot F_N \end{aligned}$$

hvor μ_r er den udnyttede sidefriktionskoefficient mellem vejoverfladen og køretøjets dæk, altså et tal i intervallet $[0; \mu_{r,\max}]$

$\mu_{r,\max}$ er den maksimale sidefriktionskoefficient mellem vejoverfladen og køretøjets dæk

Isoleres størrelsen $\mu_{r,\max}$ fås udtrykket:

$$[100] \quad \mu_{r,\max} \geq \frac{-M \cdot g \cdot \sin \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_H} \cdot \cos \alpha_r}{M \cdot g \cdot \cos \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \sin \alpha_r} = \frac{-\tan \alpha_r + \frac{v^2}{g \cdot R_H}}{1 + \frac{v^2}{g \cdot R_H} \cdot \tan \alpha_r} = \frac{-i + \frac{v^2}{g \cdot R_H}}{1 + \frac{v^2}{g \cdot R_H} \cdot i} \approx \frac{v^2}{g \cdot R_H} - i$$

Den anførte tilnærmelse er acceptabel, fordi kørebanens hældningsvinkel, α_r , og dermed sidehældningen, i , i praksis altid er lille, ligesom talstørrelsen af kurveradius, R_H , er stor i sammenligning med talstørrelsen for hastigheden.

Isoleres i udtryk [100] i stedet kurveradien, R_H , findes det kørselsdynamiske minimumskrav til horisontalkurvers radius:

$$[101] \quad R_H \geq \frac{v^2 \cdot (1 - \mu_{r,\max} \cdot i)}{g \cdot (\mu_{r,\max} + i)} \approx \frac{v^2}{g \cdot (\mu_{r,\max} + i)}$$

Tilnærmelsen skyldes også her, at kørebanens hældningsvinkel, α_r , og dermed sidehældningen, i , i praksis altid er lille, hvorfor man kan regne leddet $(1 - \mu_{r,\max} \cdot i) \approx 1$.

Indsættes værdien af tyngdeaccelerationen, og anvendes talstørrelsen for hastigheden udtrykt i km/h indgår; fremkommer følgende krav til horisontalkurveradius udtrykt i meter.

$$[102] \quad R_H \geq \frac{\{V\}^2}{127 \cdot (\mu_{r,\max} + i)} \text{ [m]}$$

Væltning

For at køretøjet ikke skal vælte, kræves det, at resultanten af normal- og tangentialkræfterne falder inden for det rektangel, der begrænses af køretøjets hjul.

Men den udformning, køretøjer har i dag, og med de krav, der stilles til sikkerhed mod skridning og til komfort, vil det kun være i helt specielle tilfælde, at væltning kan blive aktuel.

Komfortabel kurvekørsel

Naturlig rettet sideacceleration

Den sideacceleration, som centripetalkraften, F_c , påvirker trafikanten med, kompenseres på grund af overhøjden delvis af tyngdeaccelerationens komponent langs vejoverfladen. Dette forudsætter selvfølgelig, at vejens overhøjde har korrekt fortegn, dvs. at vejoverfladen hælder ind mod kurvens centrum – i modsat fald forstærkes trafikantens oplevelse af centrifugalkraftens påvirkning af den tangentielle komponent fra tyngdekraften. Den samlede, resulterende sideacceleration, a_r , som trafikanten oplever, har derfor, jævnfør udtryk [9] og [10] størrelsen:

$$[103] \quad a_r = \frac{1}{M} \cdot (F_c - F_G \cdot \sin \alpha_r) \approx \frac{1}{M} \cdot (F_c - F_G \cdot \tan \alpha_r) = \frac{v^2}{R_H} - g \cdot i$$

hvor M er køretøjets masse [kg]

g er størrelsen af tyngdeaccelerationen, $g = 9,818 \text{ m/s}^2$

i er sidegradienten [%]

α_r er vinklen mellem det vandrette plan og vejoverfladen i tværsnittet; $\tan \alpha_r = i$

v er køretøjets hastighed [m/s]

R_H er den øjeblikkelige kurveradius [m]

For enhver vejstrækning med en given kurveradius, R_H , og en given, korrekt vendt, sidehældning, i , eksisterer en hastighed, hvor den centrifugalkraft, som trafikanten oplever, netop kompenseres fuldt ud af tyngdekraftens tangentielle komponent, altså hvor den resulterende sideacceleration, som trafikanten oplever, er 0. Denne hastighed betegnes frihåndshastigheden, v_{fri} [m/s]:

$$[104] \quad v_{fri} = \sqrt{g \cdot i \cdot R_H}$$

Ved hastigheder, der er større end v_{fri} , oplever trafikanten, at køretøjet påvirkes af en resulterende acceleration væk fra kurvecentrum. Ved hastigheder, der er mindre end v_{fri} , opleves den resulterende acceleration derimod som virkende mod kurvens centrum. Her må trafikanten kompensere ved at dreje rattet modsat kurveretningen, hvilket opleves unormalt.

Det bør undgås, at der hyppigt optræder hastigheder, der er mindre end frihåndshastigheden, v_{fri} . Det kan modvirkes ved at søge at mindske sidehældningen mod til gengæld at øge horisontalkurvens radius.

Omvendt gælder det, at i ekstremssituationen, hvor vejen er meget glat, $\mu_r \approx 0$, skal tyngdeaccelerationens tangentielle komponent udbalancere hele centripetalkraften. Dette leder til, at al færdslen bør afvikles ved frihåndshastigheden, jævnfør formel [104].

Komfortabel sideacceleration

Hensynet til trafikant og passagerer betyder, at der er grænser for, hvor stor den resulterende (ukompenserede) sideacceleration, a_r , må blive. Det er derfor, jævnfør udtryk [103], at:

$$[105] \quad f_{r,till} \geq \frac{a_s}{g} \approx \frac{v^2}{g \cdot R_H} - i$$

hvor $f_{r,till}$ betegnes den tilladelige sideaccelerationskoefficient [-]

Isoleres kurveradien findes minimumskravet:

$$[106] \quad r \geq \frac{v^2 \cdot (1 - f_{r,till} \cdot i)}{g \cdot (f_{r,till} + i)} \approx \frac{v^2}{g \cdot (f_{r,till} + i)}$$

Indsættes værdien af tyngdeaccelerationen, og anvendes talstørrelsen for hastigheden udtrykt i km/h indgår; fremkommer følgende krav til horisontalkurveradius udtrykt i meter.

$$[107] \quad R_H \geq \frac{\{V\}^2}{127 \cdot (f_{r,till} + i)} \quad [\text{m}]$$

Kompensationskoefficient

Sammenligning af udtrykkene [100] og [105] henholdsvis [101] og [106] efterlader spørgsmålet om hvilket af de to hensyn, der er stærkest, altså om $\mu_{r,max}$ eller $f_{r,till}$ er mindst.

I projekteringssituationen, og ved kørsel under normale vej- og føreforhold, er det den tilladelige, resulterende (ukompenserede) sideaccelerationskoefficient, $f_{r,till}$, der er udslagsgivende.

Under ekstreme vej- og føreforhold, fx ved kørsel på is- eller snebelagte veje eller på veje med aquaplanning, vil den friktionskoefficient, der kan etableres mellem køretøjets hjul og vejoverfladen, imidlertid ikke kunne nå samme størrelse som den komfortfastsatte, tilladelige sideaccelerationskoefficient. Under sådanne forhold må trafikanten afpasse sin hastighed til de aktuelle forhold.

Udtrykkene [101] og [106] kan omskrives:

$$[108] \quad R_H \geq K \cdot \frac{v^2}{g \cdot i}$$

hvor K betegnes kompensationsfaktoren [-], der kan fastlægges:

$$[109] \quad K = \frac{i}{i + \min(\mu_{r,max}; f_{r,till})}$$

Kompensationsfaktoren kan opfattes som en reduktionsfaktor for den hastighed, v , som vejen udformes for. Betragtes fx situationen, hvor $\mu_{r,max} > f_{r,till}$, kan frihåndshastigheden udtrykkes:

$$[110] \quad v_{fri} = v\sqrt{K}$$

idet sideaccelerationen ved denne hastighed, jævnfør [103], vil være:

$$[111] \quad a_r = \frac{v_{fri}^2}{R_H} - g \cdot i = \frac{v^2}{R_H} \cdot \frac{i}{i + f_{r,till}} - g \cdot i = \frac{v^2}{\frac{v^2}{g \cdot (i + f_{r,till})}} \cdot \frac{i}{i + f_{r,till}} - g \cdot i = g \cdot i - g \cdot i = 0$$

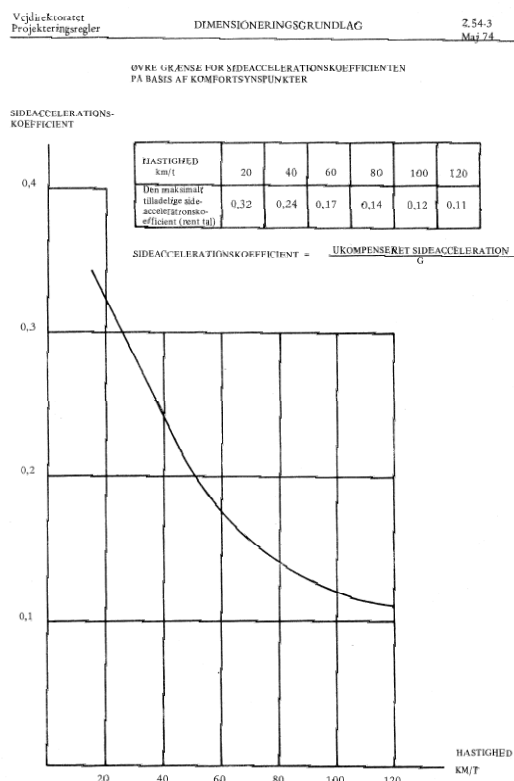
I praksis kan man derfor fastsætte mindste sidefald ud fra kendskab til den maksimalt tilladelige sideaccelerationskoefficient ved den givne hastighed:

$$[112] \quad i \geq \frac{K}{1 - K} \cdot f_{r,till}$$

idet sidefaldet, i , tillige er bundet i et interval fastsat dels af hensyn til sikring af regnvandsafstrømning fra kørebanen, dels ud fra ønsket om at sikre, at et køretøj skal kunne mobilisere tilstrækkelig friktion til at kunne stå fast selv i tilfælde af islag på kørebanen.

Kompensationskoefficienten kan alternativt opfattes som angivende, hvor stor en del af den optrædende sideacceleration, der optages af sidehældningen. Kompensationskoefficienten bestemmes også her ved udtryk [109], men vil variere med hastigheden, og vil ved en given hastighed antage sin maksimalværdi for den maksimalt tilladte sidegradient.

Figur 43. Motorvejsreglernes øvre grænse for sideaccelerationskoefficienten på basis af komfortsynspunkter. Fra (13).



Den førstnævnte tolkning af kompensationskoefficienten medfører, for fornuftigt valg af K , komfortabel kørsel med minimale krav om friktion, men også større mindsteradier i horisontalkurver. Den sidstnævnte udlægning lægger op til fuld udnyttelse af de maksimalt acceptable sideaccelerationskoefficienter, hvilket nogle steder vil være rimeligt, fx på ramper.

Sideaccelerationskoefficienter og kompensationskoefficienter i danske vejregler

1943-reglerne

De danske 1943-vejregler (34) angiver ikke en særskilte grænseværdi for sidefriktionskoefficienten eller for den tilladte sideaccelerationskoefficient. Reglerne fastsætter, som nævnt, en øvre grænse på 60 ‰ for sidegradienten, i . Reglerne angiver endvidere (indirekte), at sidegradienten så vidt muligt bør fastlægges med en kompensationskoefficient på $K = 0,6$.

1964-reglerne

Ejheller udkast til vejregler fra 1964 (12) fastlægger grænseværdier for sidefriktionskoefficienten eller for den tilladte sideaccelerationskoefficient. Udkastet rummer en tabel, der for de enkelte vejklasser angiver sidehældningen ved givne horisontalkurveradier.

Motorvejsreglerne

De danske motorvejsregler (13) anfører at, ved lave hastigheder (20 – 40 km/h) er den øvre grænse for de resulterende (ukompenserede) sideaccelerationsværdier, der ud fra et komfortsynspunkt kan betegnes som acceptable, ifølge danske undersøgelser¹ ca. 2,5 – 3,0 m/s², og at grænseværdien aftager med voksende hastighed og er ca. 1,0 m/s² ved 120 km/h.

¹ Motorvejsreglerne angiver desværre ikke kilden til disse undersøgelser.

Tabel 16. Sammenhørende værdier af ønsket hastighed, V_0 , og tilladelig sideaccelerationskoefficient (maksimalt tilladelig sidefriktionskoefficient), $f_{s,till,VR}$, i henhold til vejregelforslagene (14)(15).

Hastighed V_0 [km/h]	Sidefriktionskoefficient (14)(15)
130	0,06
120	0,07
110	0,08
100	0,10
90	0,12
80	0,14
70	0,16
60	0,18
50	0,20
40	0,22
30	0,24

Motorvejsreglerne anviser for motorveje, hvor dimensioneringshastigheden er 120 km/h, at sidehældningen beregnes med en kompensationskoefficient på $K = 0,5$, når horisontalkurveradien er mindre end $R_H = 2800$ m.

Motorvejsreglerne giver endvidere en kurve og en tabel, over den øvre grænse for den ukompenserede sideaccelerationskoefficient, jævnfør Figur 43. Det angives, at kurven er et resultat af amerikanske og danske undersøgelser. Endelig anføres det, at det undertiden vil være sidefriktionen, og ikke sideaccelerationen, som er bestemmende for en horisontalkurves dimensionering. Værdierne er introduceret i Danmark allerede i slutningen af 1968 (51), og de genfindes i de dengang gældende vejstandarder fra Californien.

Nye vejregelforslag

De seneste forslag til vejregler for veje og stier i det åbne land (14)(15) angiver, at den maksimalt tilladelige sidefriktionskoefficient, $\mu_{r,max}$, fastsættes ud fra komfortkriterium – altså at det er sideaccelerationen og ikke sidefriktionen, der er bestemmende. Endvidere anføres, at størrelsen »med baggrund i omfattende udenlandske undersøgelser«¹ kan fastsættes til de i Tabel 16 angivne værdier.

I forbindelse med beregninger af blandt andet bremselængder kan det være hensigtsmæssigt at anvende et funktionsudtryk for den maksimalt tilladelige sideaccelerationskoefficient. I det øjemed bemærkes (44), at de værdier, vejregelforslagene oplyser, med god forklaringsgrad ($r^2 = 0,978$) kan udtrykkes ved en eksponentiel afhængighed af hastigheden, v [m/s], jævnfør Figur 44:

$$[113] \quad f_{r,till} = 0,41 \cdot e^{-0,0515v}$$

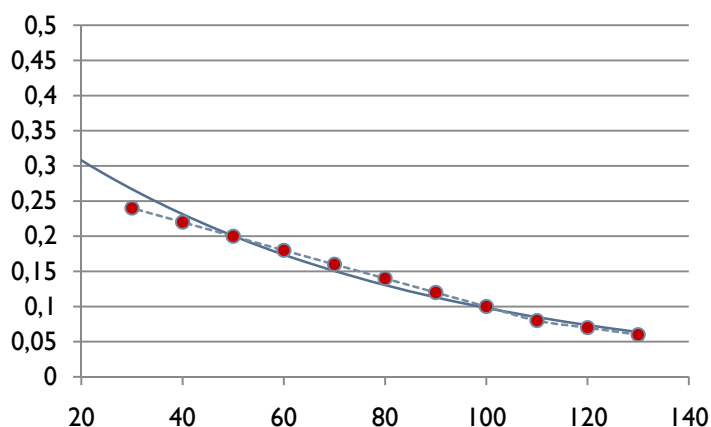
Oversigt i horisontalkurve

Også gennem horisontalkurver skal der være oversigt i nødvendigt omfang. Trafikanterne skal kunne opfatte hindringer og hinanden så tidligt, at de er i stand til at standse eller manøvrere.

Ligesom tilfældet er ved vertikalkurver, ser man ved fastsættelsen af horisontalkurveradierne på behovene for stopsigt, mødesigt og horisontalsigt. Betragtningerne er principielt de samme. De væsentligste forskelle ligger i placeringen af øje og objekt og dermed i krav om afstand til ubrudte, faste genstande langs horisontalkurven, samt i at trafikanterne ved kørsel i horisontalkurver ikke kan udnytte den totale friktion, jævnfør friktionsellipsen, se formel [47].

¹ Vejregelforslagene angiver desværre ikke kilder til disse undersøgelser.

Figur 44. Tilladelig sideaccelerationskoefficient, $f_{s, \text{til}}$, dels (rød) i henhold til vejreglerne, jævnfør Tabel 16, dels (blå) i henhold til den eksponentielle model, udtryk [113]. Abscisseaksen angiver den aktuelle hastighed [km/h].



Geometriske sammenhænge

Geometrien ved vurdering af oversigten i horisontalkurver er vist i Figur 45 og Figur 46 for stopsigtsituationen henholdsvis for mødesigt- og overhalingssigtsituationerne.

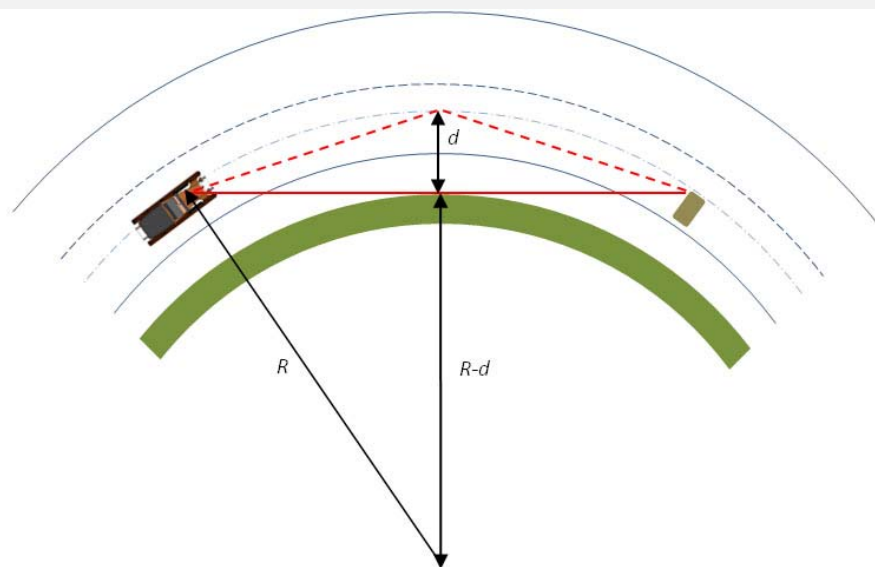
I begge tilfælde vurderes relationen mellem den nødvendige oversigt, S , kurveradius, R , og afstanden, d , til sidehindringer langs kurven. Da $R \gg d$, gælder, jævnfør reglen om punkts potens:

$$[114] \quad \frac{1}{4} \cdot S^2 = 2 \cdot R \cdot d$$

eller

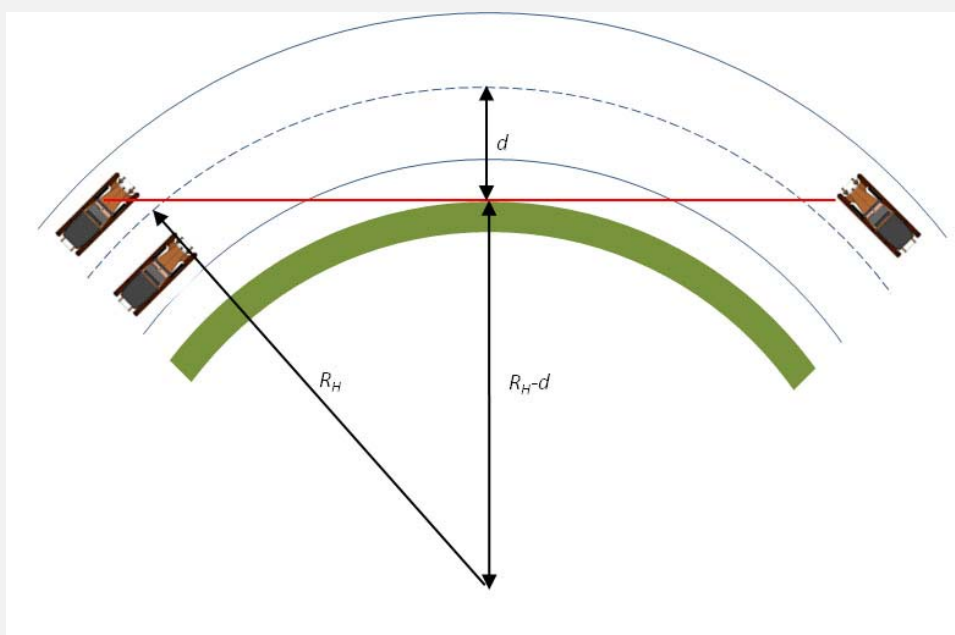
$$[115] \quad R = \frac{S^2}{8 \cdot d}$$

De hindringer, der er tale om, befinder sig oftest langs kurvens inderside, eller på flersporede veje i midterrabatten. Der er typisk tale om autoværn, sammenhængende beplantning, støjskærme, skråningsanlæg eller mure, fx i tunneller; men hindringen kan også være en kø, der passeres, eller en række standsede køretøjer langs vejen.



Figur 45. Horisontalt stop-sigt. Når cirkelradius R er meget større end afstanden til hindringen d , $R \gg d$, vil trekantens hypotenuser (de røde kortstregslinjer) kunne regnes lig den halve sigtelængde, S . Ifølge reglen om punkts potens gælder da, at $\frac{1}{4} \cdot S^2 = 2 \cdot R \cdot d$. Efter (15).

Figur 46. Horisontalt møde- og overhalingssigt. Efter (15).



Placering af øje og objekt

Ved vurderingen betragtes en personbil. Øjehøjden, h_θ , ansættes i de seneste danske vejregler, (14)(15), til at være 1,0 m.

Objekthøjden, h_o , ansættes til 0,15 m ved stopsigt, og 1,0 m ved møde- og overhalingssigt, jævnfør Tabel 8.

Dog angiver Vejreglerådets nye bestemmelser for motorveje, (25)(26), at man der kan regne med en objekthøjde på 1,0 m, svarende til holdende køretøjers baglygtelys. Denne justering indebærer blandt andet, at man i reglen kan påregne, at motorvejens autoværn ikke vil udgøre en hindring ved stopsigtevurderingen.

I det horisontale plan antages køretøjet placeret, således at man i stopsigtsituationen kan måle oversigten midt i køresporet, og i møde- og overhalingssigtsituationerne midt i kørebanen.

Det betyder, at sideafstanden, d , i stopsigtsituationerne normalt er sammensat af den halve køresporsbredde, bredden af eventuel kantbane, bredden af eventuelt nødspor samt oversigtbare arealer af rabatten og dennes naboarealer – sidstnævnte dog kun i det omfang, græs og anden beplantning holdes klippet, og private arealer kun i det omfang de er pålagt oversigtsservitutter. Ved vurderingen skal tages hensyn til den betydning vejens vertikalforløb kan have.

Hvor der er tale om at vurdere stopsigt ved passage af en kø, må sideafstanden, d , naturligvis vurderes under hensyntagen til de konkrete forhold.

I møde- og overhalingssituationerne er sideafstanden, d , tilsvarende sammensat af køresporsbredden, bredden af eventuel kantbane, bredden af eventuelt nødspor samt oversigtbare arealer af rabatten og dennes naboarealer.

Sigt

De nødvendige sigtelængder gennem horisontalkurver bestemmes principielt på samme måde som ved kørsel gennem vertikalkurver, altså på grundlag af standselængden, L_s , ved ønsket hastighed, V_θ , og ved $V_{85\%}$ samt på grundlag af overhalingssmodeller. Tabel 4 angiver, hvornår der i de seneste danske vejregler, (14)(15), arbejdes med V_θ , og ved $V_{85\%}$.

Tabel 17. De danske vejreglers værdier for resulterende middelfriktionskoefficient, aktuel sideaccelerationskoefficient (maksimalt tilladelig sidefriktionskoefficient) og middelfriktionskoefficient ved fuld opbremsning fra hastigheden V . Fra (14)(15).

Hastighed V [km/h]	Resulterende friktionskoefficient	Sidefriktionskoefficient	Bremsefriktionskoefficient
130	0,28	0,06	0,27
120	0,29	0,07	0,28
110	0,30	0,08	0,29
100	0,31	0,10	0,30
90	0,33	0,12	0,31
80	0,34	0,14	0,31
70	0,35	0,16	0,31
60	0,36	0,18	0,31
50	0,377	0,20	0,31

Bremsefriktion

Ved kørsel gennem horisontalkurver skal der dog tages hensyn til, at selve kurvekørslen lægger beslag på en del af den friktion, der kan tilvejebringes mellem køretøjets dæk og vejoverfladen. Derfor er det nødvendigt at fradrage denne del i den friktionskoefficient, der anvendes til at beregne standselængden.

Beskrives den totale friktionskoefficient ved udtrykket [53] og sideaccelerationskoefficienten, der ikke er kompenseret gennem vejoverfladens sidegradient ved udtryk [113], findes (jævnfør friktionsellipsen) følgende udtryk for opbremsningens koefficient:

$$[116] \quad \frac{a}{g} = \mu_B - s = \sqrt{\mu_T^2 - f_{r,till}^2} - s = \sqrt{(0,46 \cdot e^{-0,0205v})^2 - (0,41 \cdot e^{-0,0515v})^2} - s$$

hvor a er den aktuelle acceleration [m/s²]
 g er tyngdeaccelerationen [m/s²]
 μ_B er bremsefriktionskoefficienten [-]
 s er længdegradienten [-]
 v er den aktuelle hastighed [m/s], og
 hvor parametrene A og B i udtryk [53] er indsat

Udtrykket kan anvendes til at bestemme standselængden, L_S , numerisk.

Tabel 18. Mindste kurveradier [m] i horisontalkurver i henhold til det seneste danske vejregelforslag (15).

Stopsigt og mødesigt er angivet under forudsætning af 2,0 m oversigt fra køresporskant ved $V_{\phi} \geq 60$ km/h, og 1,50 m oversigt fra køresporskant ved $V_{\phi} < 60$ km/h. Stoplængde ved kø er angivet under forudsætning af et 3,5 m bredt kørselspor. Overhalingssigt er angivet under forudsætning af 4,0 m oversigt uden for kørselsporet.

Den kørselsdynamiske værdi forudsætter 70 % sidehældning, ubetydelig længdegradient og overholdelse af $f_{r,till}$.

Hastighed V_{ϕ} [km/h]	Stopsigt		Mødesigt	Overhaling	Kørselsdynamik
	over rabat 2,0 (1,5) m	langs kø	over rabat 2,0 (1,5) m	over rabat 4,0 m	$i = 70 \text{ ‰}$
Beregning	$V_{85\%}$	$V_{85\%}$	V_{ϕ}	V_{ϕ}	$V_{85\%}$
110	3.460	5.380			635
100	2.460	3.820			465
90	1.820	2.670	2.110		335
80	1.170	1.820	1.440	6.980	240
70	790	1.220	910	5.910	170
60	510	790	570	4.930	115
50	370	500	340	4.470	75
40	220	290	180	4.030	45
30	130	170	70		25

Horisontalkurveradier

De danske vejregler, (14)(15), angiver værdier for den resulterende middelbremsefriktionskoefficient ved fuld opbremsning fra en given hastighed, jævnfør *Tabel 17*. Disse middelbremsefriktionskoefficienter kan anvendes til at fastsætte standselængden.

Vejreglerne anfører, at horisontalkurver mindre end 400 m ofte er uheldsbelastede. De bør derfor udgås.

Linjeføringselementer

Linjeføringen opbygges af rette linjer, af cirkelbuer og af overgangskurver.

Rette linjer og cirkelbuer blev tidligere anset som linjeføringens hovedelementer. Overgangskurverne skulle alene, som navnet antyder, danne en overgang fra den rette linje til en cirkelbue eller mellem to cirkelbuer.

Denne betragtning holder ikke længere. En linjeføring kan konstrueres alene af overgangskurver, og ved nyere, større veje udgør overgangskurverne ofte en ganske stor del af linjeføringen. Overgangskurverne må derfor betragtes som en selvstændigt, tredje type tracéringselement.

Årsagen til denne ændrede tilgang er især de bedre regnemuligheder, som edb har givet.

Den rette linje

Den rette linje er det simpleste linjeføringselement. Den udgør den korteste vej mellem to punkter, og den var det foretrukne og tilstræbte forløb på Det romerske Imperiums strategiske vejnet, på de nyere chaussées, der blev anlagt frem mod bilismens indtog, og på jernbanenettet, hvor der var højdeforskelle, der skulle tages hensyn til.

Den rette linje rummer ikke kørseldynamiske udfordringer, der skal tages hensyn til, på tværs af kørselsretningen. Færdigvejtværprofilet vil i reglen være tagformet med vandaflledning til begge sider. Normaltværssnittet kan lægges til grund, blot skråninger og langsgående afvandringskonstruktioner tilpasses terrænet.

Lange, rette linjer i linjeføringen har dog den sikkerhedsmæssige hage, at de er monotone at køre på. Det kan påvirke trafikantens opmærksomhed i uheldig retning. Kombineres lange, rette linjer med kurver med forholdsvis små horisontalradier, viser erfaringen, at overgangen til kurverne kan udvikle sig til »sorte pletter«. Strækningen på motorvej E20 fra Halsskov mod Trelleborg, jævnfør Figur 47, er et eksempel, hvor dette problem tidligere optrådte.

Beregning

Stationeringspunkter på en ret linje vil være fastlagt, når man kender:



Figur 47. Udsnit af en af de ældste danske motorveje, nemlig E20 – Vestmotorvejen mellem Halsskov (Korsør) og Slagelse. Strækningen er opbygget af rette linjestykker, hvorimellem der er indlagt kurver med forholdsvis små horisontalradier. Billede fra Google Earth.

- Koordinaterne til et stationeret punkt på linjen; punktet behøver ikke selv at ligge på linjeføringen, men kan fx være koordinaterne (X_O, Y_O) til det punkt O på linjeføringens forlængelse, der ville svare til et nulpunkt for stationeringen: $S_O = 0$
- Linjens retningsvinkel, τ , i forhold til det overordnede XY -koordinatsystems X -akse; retningsvinklen angives i forhold til voksende stationering på linjen

Ud fra disse størrelser kan koordinaterne til punktet, P , der ligger på linjen og har stationeringen S_P , bestemmes af:

$$[117] \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \end{bmatrix} + S_P \cdot \begin{bmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{bmatrix}$$

Parametrene (X_O, Y_O) og τ kan bestemmes, når der kendes punkter på linjen. Det rette linjestykke gennem to punkter, A og B , der har begge har kendte koordinater, og om hvilke det vides, at A har en lavere stationering end B , har retningsvinklen:

$$[118] \quad \tau = \tau_{AB} = \arctan \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

idet $\tau = \pm \frac{1}{2} \cdot \pi$ hvis linjen er parallel med Y -aksen ($X_A = X_B$)
den matematisk »rene« $\arctan$ -værdi for τ øges med π , hvis $X_B < X_A$

Hvis punktet A 's stationering, S_A , er kendt, bestemmes stationeringen af det punkt, O , der svarer til stationeringen $S_O = 0$:

$$[119] \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \end{bmatrix} + S_P \cdot \begin{bmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{bmatrix}$$

Det bemærkes, at længden af linjestykket mellem de to kendte punkter, A og B , er:

$$[120] \quad L_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

Når punktet A 's stationering, S_A , er kendt, bestemmes stationeringen af punkt B :

$$[121] \quad S_B = S_A \pm L_{AB}$$

hvor: plus-tegnet anvendes, når punktet A ligger tidligere på stationeringen end B

Endvidere bemærkes, at koordinaterne til et punkt, P , der ligger på den rette linje gennem A og B , og har stationeringen S_P , kan bestemmes af:

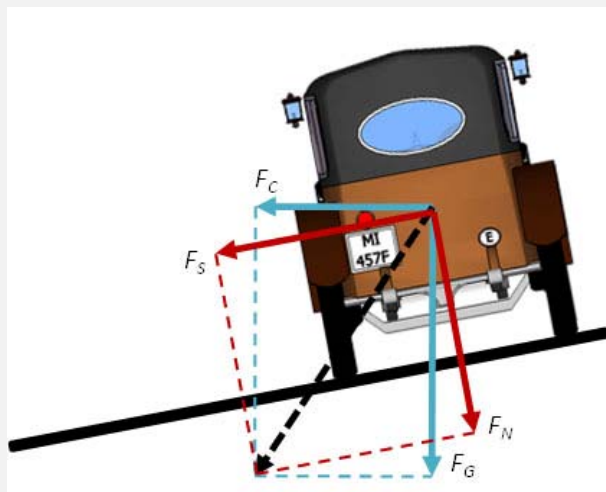
$$[122] \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} + \frac{S_P - S_A}{L_{AB}} \cdot \begin{bmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \end{bmatrix}$$

Koordinaterne til det punkt, O , på den rette linje, der svarer til stationeringen $S_O = 0$, er derfor:

Indgår linjestykket gennem punkterne A og B i linjeføringen, vil linjen – og dermed også tangenten til linjeføringen – ligge i vejkoordinatsystemets y -akse. I ethvert punkt, P , på linjestykket er vejkoordinatsystemets vinkeldrejning, θ_P , i forhold til det overordnede XY -koordinatsystem derfor:

$$[123] \quad \theta = \theta_P = \theta_{AB} = \tau_{AB} - \frac{\pi}{2} = \arctan \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} - \frac{\pi}{2}$$

Figur 48. Kræftpåvirkning af et køretøj, der bevæger sig i en venstredrejet cirkelbue. Såvel gravitationskraften, F_G , som centripetalkraften, F_C , opløses i komponenter vinkelret henholdsvis parallelle med vejoverfladen. Disse komponenters resultanter skal modsvare den normale reaktionskraft på vejbelægningen, F_N , og summen af friktionskræfterne mellem vejbelægningen og køretøjets dæk, F_S .



Cirkelbuen

Også cirkelbuen er et simpelt linjeføringsselement. Når cirkelbuen gennemkøres med konstant hastighed, oplever trafikanten en konstant, centrifugal påvirkning. Det er et udslag af, at køretøjet påvirkes af centripetale kræfter, når det følger cirkelbuen.

Kræfterne tilvejebringes ved dækkenes friktion med vejoverfladen og ved at lade færdigvejs-overfladen have ensidigt fald mod cirkelns centrum, jævnfør Figur 48.

Beregning

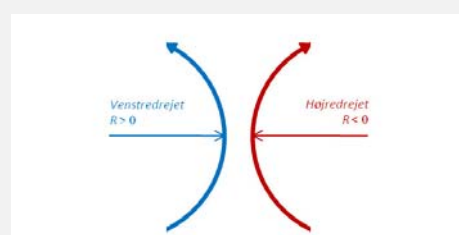
Fortegnskonvention

Beregning af cirkelbuen som linjeføringsselement kræver, at man skelner mellem kurver, der drejer mod højre henholdsvis mod venstre i stationeringsretningen.

I kurver, der drejer mod højre, ligger cirkelns centrum til højre for cirkelbuen, når man ser i stationeringsretningen. Modsat ligger centrum til venstre for cirkelbuen, når man i en kurve, der drejer mod venstre, ser i stationeringsretningen.

Der indføres den *konvention*, at radius regnes positiv, når kurven drejer mod højre, og negativ, når kurven drejer mod venstre, jævnfør Figur 49.¹ Set fra cirkelcentrum drejer en stationering med positiv radius således med den positive omdrejningsretning, mens stationeringen drejer modsat, når radius er negativ.

Ved at regne cirkelradier med fortegn på denne måde, kan beregningsformlerne bringes på samme form.



Figur 49. Venstredrejet henholdsvis højredrejet cirkelbue.

¹ Ved ældre beregninger, foretaget med fx Vejdatalaboratoriets program V102 (51), vil cirkelbuens fortegn være modsat. Dette skyldes, at programmet håndterede koordinattransformation fra det højredrejede vejkoordinatsystem til det venstredrejede System 34.

Fastlæggelse af cirkelbuens punkter

Stationeringspunkter på en cirkelbue vil være fastlagt, når man kender:

- Koordinaterne (X_C, Y_C) til cirkelns centrum.
- Cirkelns radius, R .
- Faseforskydningen, φ_0 , til det punkt O på cirklen, der ville svare til et nulpunkt for stationeringen: $S_O = 0$; faseforskydningen er vinklen, som linjestykket fra C til O har med koordinatsystemets X -akse.
- Angivelse af, om faseforskydningen ved voksende stationering gennem cirklen bevæger sig med eller mod den positive omløbsretning i XY -koordinatsystemet; denne angivelse kan i praksis, jævnfør ovenfor, ske ved at regne cirkelns radius med fortegn.

Ud fra disse størrelser kan koordinaterne til punktet, P , der ligger på cirklen og har stationeringen S_P , bestemmes af:

$$[124] \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} + R \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{S_P}{|R|} + \varphi_0\right) \\ \sin\left(\frac{S_P}{|R|} + \varphi_0\right) \end{bmatrix}$$

Parametrene, der fastlægger cirklen, (X_C, Y_C) , R og φ_0 , kan fastlægges, når der kendes punkter på og eventuelt tangenter til cirklen. Det kan blandt andet ske ved metoder fra den klassiske geometri.

Når cirkelns centrum er bestemt, og der kendes et punkt A med stationeringen S_A på cirkelkurven, kan størrelsen af radius bestemmes på sædvanlig vis:

$$[125] \quad R = \pm |CA| = \pm \sqrt{(X_A - X_C)^2 + (Y_A - Y_C)^2}$$

idet fortegnet bestemmes af, om cirkelkurven er venstre- eller højredrejet, jævnfør fortegnskonventionen.

Ligeledes bestemmes faseforskydningen til placeringen af et virtuelt nulpunkt for stationeringen på cirklen:

$$[126] \quad \varphi_0 = \arctan\left(\frac{Y_A - Y_C}{X_A - X_C}\right) - \frac{S_A}{|R|}$$

Indsættes faseforskydningen i formel [12] fås udtrykket:

$$[127] \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix} + R \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{S_P}{|R|} + \arctan\left(\frac{Y_A - Y_C}{X_A - X_C}\right) - \frac{S_A}{|R|}\right) \\ \sin\left(\frac{S_P}{|R|} + \arctan\left(\frac{Y_A - Y_C}{X_A - X_C}\right) - \frac{S_A}{|R|}\right) \end{bmatrix}$$

Da de trigonometriske funktioner er cykliske, kan faseforskydningen reduceres eller øges med et vilkårligt, helt multipla af $2 \cdot \pi$. Det vil svare til, at et $2 \cdot \pi \cdot |R|$ langt stationeringsstykke virtuelt bliver ført et antal gange mindre eller mere rundt om hele cirklen.

I punktet P på stationeringslinjen ligger vejkoordinatsystemets x -akse, afhængigt af fortegnet på R , i samme eller modsatte retning som CS -vektoren. I punktet P har vejkoordinatsystemet derfor vinkeldrejningen θ_P i forhold til XY -koordinatsystemet:

$$\begin{aligned}
 \theta_p &= \frac{R}{|R|} \cdot \arctan \frac{Y_S - Y_C}{X_S - X_C} = \frac{R}{|R|} \cdot \arctan \left(\frac{\sin \left(\frac{S_P}{|R|} + \varphi_O \right)}{\cos \left(\frac{S_P}{|R|} + \varphi_O \right)} \right) \\
 [128] \quad &= \frac{R}{|R|} \cdot \arctan \left(\frac{\sin \left(\frac{S_P}{|R|} + \arctan \left(\frac{Y_A - Y_C}{X_A - X_C} \right) - \frac{S_A}{|R|} \right)}{\cos \left(\frac{S_P}{|R|} + \arctan \left(\frac{Y_A - Y_C}{X_A - X_C} \right) - \frac{S_A}{|R|} \right)} \right)
 \end{aligned}$$

Valg af horisontalkurveradius

For at hindre at køretøjet skrider ved kørsel i cirkelbuen, gælder det endvidere, at kræfterne skal være i ligevægt. Det betyder, at de kørselsdynamiske forhold skal vurderes, jævnfør Figur 48. I praksis indebærer dette, at følgende forhold skal være tilgodeset:

$$[129] \quad R \geq \frac{v^2}{g \cdot (\mu_{s,v,\max} + i)}$$

hvor: R er horisontalcirkelens radius [m]

v er køretøjets hastighed [m/s]

g er tyngdeaccelerationen [m/s²]

$\mu_{s,v,\max}$ er den maksimale friktionskoefficient, der ved den pågældende hastighed kan påregnes mellem dæk og vejoverflade vinkelret på kørselsretningen [-]

i er vejoverfladens tværfald [-]

Ved anvendelse af formel [16] skal der naturligvis tages hensyn til, at der også er behov for friktion i kørselsretningen, og at det resulterende fald er begrænset såvel opad som nedad til.

Det skal sikres, at der er tilstrækkelig sigt i horisontalkurven. Tillige bør horisontalradien på en vejstrækning have nogenlunde ens størrelse, således at trafikanterne ikke overraskes af uventet kraftige retningsændringer.

Vejreglerne (15) anfører, at kurver med horisontalradius $R < 400$ m ofte har en stor uheldsfrekvens, specielt hvis de følger efter en længere retlinet strækning. Det anbefales derfor, at relationerne i Tabel 19 respekteres.

Ved sammensatte, ensvendte cirkelkurver, bør forholdet mellem den mindste og den største horisontalradius, i følge vejreglerne, være mindst 0,7 af sikkerhedsmæssige og æstetiske grunde.

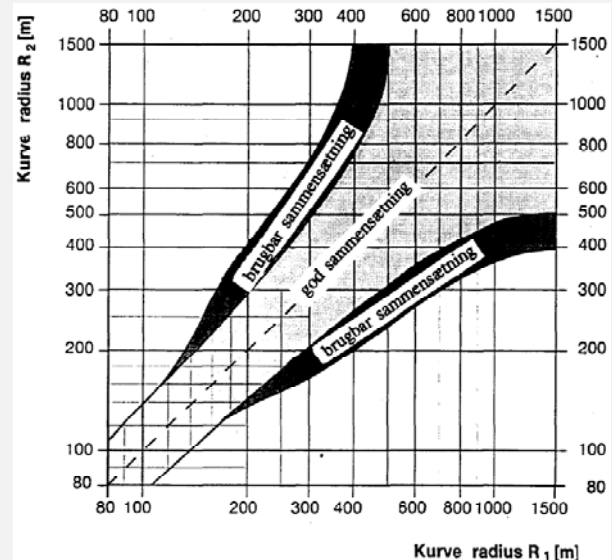
Herudover anfører vejreglerne, at kurver mellem retlinede strækninger, der begge kan ses på én gang, så vidt muligt bør give anledning til en vinkelændring på mindst 15°.

Endelig anføres det, at nabokurver, der ligger så tæt, at deres fællestangent er kortere end to gange den mindste radius bør have et størrelsesforhold i henhold til Figur 50.

Tabel 19. Mindste horisontalkurveradius efter en retlinet vejstrækning. (15)

Længde af retlinet strækning	Mindste horisontalkurveradius
$L \geq 300$ m	$R > 400$ m
$L < 300$ m	$R > L$

Figur 50. Krav til nabokurver i horisontalkurvaturen, når kurverne ligger så tæt, at længden af deres fællestangent er mindre end to gange den mindste af radierne. (15)



Overgangskurver

Introduktion

Behovet for overgangskurver

Overgangskurvens opgave var oprindeligt at sikre en jævn ændring i den centripetalacceleration, der påvirker en jernbanevogn, som bevæger sig fra en ret linje ind i en horisontal cirkelkurve.

Uden overgangskurve ændrer centripetalaccelerationen sig brat i tangentialpunktet, hvor den retlinede strækning afløses af horisontalkurven. Den bratte ændring var måske acceptabel i jernbanens spæde barndom, da hastigheden var ganske lav. Med stigende hastigheder på jernbanen øges centripetalaccelerationen i kurven, og ændringen i tangentialpunktet bliver stedse kraftigere og opleves stedse mere ukomfortabel. Effekten kan mindskes ved at øge horisontalkurvens radius, så der ikke skal overvindes en slet så stor ændring. Alternativt kan ændringen fordeles over en strækning, og således blive tålelig.

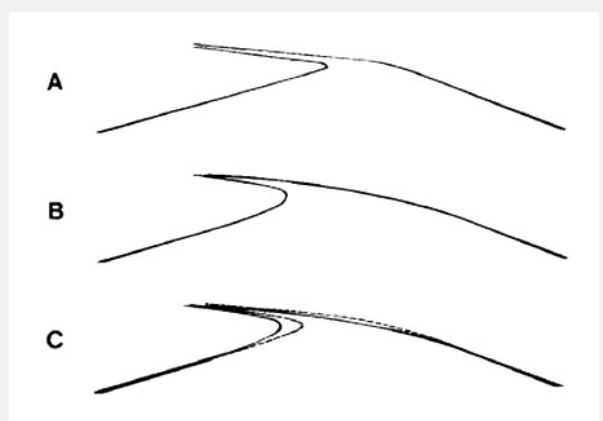
Et automobil behøver ikke slavisk at følge vejmidten eller en af kørebaneanterne. På den anden side kan køretøjet ikke undgå at følge en eller anden overgangskurve, når det bevæger sig fra en retlinet strækning til en cirkelbue. Andet ville forudsætte, at de styrende hjul momentant blev drejet, svarende til at chaufføren momentant drejede rattet. Når køretøjet således alligevel vil gennemløbe en overgangskurve, er det naturligvis praktisk at man allerede, når vejen designs, indlægger overgangskurver i linjeføringen.

Der er yderligere grunde til at lægge overgangskurver ind (52):

Overgangskurver giver mulighed for at indpasse vejens linjeføring bedre til terrænet, til terræn- genstandene og til tvangspunkter. Det skyldes, at der kan indlægges uendeligt mange overgangskurver imellem en given retlinet strækning og en given kurve, fx en given cirkelbue.

Overgangskurver kan eliminere det optiske indtryk, som trafikanten får af, at der optræder et udadgående knæk i tangentialpunktet, når en cirkelbue følger i umiddelbar forlængelse af en retlinet strækning, jævnfør Figur 51. Ved at anvende overgangskurver, får man altså formet vejens forløb, så det giver et æstetisk set mere tilfredsstillende billede.

Figur 51. Overgangskurven giver en stærk formvirkning i perspektivet. En cirkelbue i umiddelbar forlængelse af en retlinet vejstrækning giver anledning til, at trafikanten opfatter at kørebanekanten har et udadgående knæk i tangentspunktet (A). Ved at indlægge en passende overgangskurve, undertrykkes dette optiske bedrag, og kurven tegner sig mere tiltalende (B). Den sideforskydning, der er tale om ved brugen af overgangskurver, er beskeden (C). Efter (2)



Overgangskurven kan rumme den strækning, over hvilken der etableret overhøjde i vejens tværprofil. På denne strækning ændres tværprofilet fra det normale, tagformede profil på en retlinet strækning til et énsidigt hældende profil igennem en cirkelbue.

Overgangskurven kan tilsvarende rumme den breddeforøgelse af vognbanerne, der eventuelt måtte være nødvendig ved kørsel gennem cirkelbuen.

Ibrugtagningen af overgangskurver

Den enkleste, teoretisk »rigtige« overgangskurve, *klothoiden*, blev først for alvor taget i anvendelse i forbindelse i midten af 1900-tallet. Klothoiden kan beskrives som den kurve, et køretøj bevæger sig efter, hvis man forudsætter, at køretøjets hastighed holdes konstant, samtidigt med at føreren nøjagtigt i det øjeblik, hun passerer tangentspunktet, begynder at dreje forhjulene og derefter stadigt – med konstant vinkelhastighed – drejer disse, indtil den maksimale drejning, som er nødvendig for gennemkørsel af den efterfølgende cirkelbue, er nået.(53)

Klothoiden var kendt længe før da; den er behandlet allerede i midten af 1700-tallet. Dens praktiske brug var imidlertid besværliggjort af, at det matematisk set ikke er helt simpelt at beregne klothoidens koordinater. Man undveg derfor at bruge den.

I stedet blev forskellige tilnærmelser til klothoiden anvendt som overgangskurver. Inden for jernbanebygningen er navnlig *den kubiske parabel* benyttet, og på vejene har man anvendt overgangskurver i form af *kvadratiske parabler*, *kubiske parabler* og *lemniskater*.

Da man i Tyskland begyndte at konstruere Autobahnen til høje hastigheder, anså man ikke parablerne for at være tilstrækkeligt nøjagtige. Man gik derfor over til at bruge klothoider. De praktiske beregningsproblemer blev løst ved, at der i begyndelsen af 1940-erne blev udarbejdet omfattende tabeller, som understøtter systematiske beregningsforløb.

Til brug for tegnestuearbejdet fremstilledes tillige klothoideskabeloner, se Figur 52.

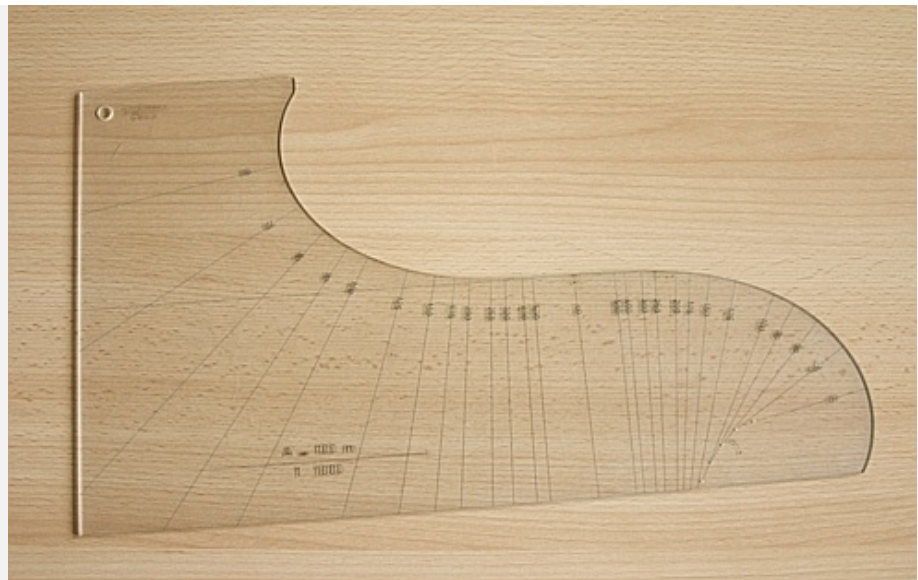
I takt med, at man for alvor begyndte at bruge klothoider i linjeføringen, ledte det også til en erkendelse af, at man ikke alene kunne håndtere selve overgangskurven, men også, at man havde fået et værktøj til at skabe kørselsdynamisk gode tracéer med langt bedre landskabsindpasning. Nøglen var at opbygge tracéen alene eller altovervejende af klothoider.

Først så sent som i 1960-erne vandt overgangskurver for alvor indpas i dansk vejbygning. I udkast til vejregler fra 1960 (12) blev det angivet, at »overgangskurve skal anvendes ved alle kurver med radier mindre end eller lig 1500 m på veje, hvor dimensioneringshastigheden er lig med eller større end 80 km/time, samt ved tilslutningsanlæg på motorveje. Overgangskurver kan i øvrigt anvendes ved kurver med større radier end 1500 m«.

Figur 52. Fotografi af klothoideskabelon til brug for tegnestuearbejde. Efter (54).

Foto: Erik Vestergaard.

SKAL ERSTATTES!



Det anføres endvidere, at »overgangskurver udformes som klothoider ...«. Udkast til vejregler lå til grund for sagsbehandlingen i forbindelse med de ret betydelige tilskud, som de danske vejbestyrrelser kunne opnå fra den daværende vejfond. Dette forhold har utvivlsomt haft en stærkt promoverende effekt.

Ligeledes har det haft stor betydning, at brugen af klothoiden allerede gennem en årrække havde været knæsat i Tyskland og i Schweiz, på det tidspunkt vejbygningsfaget i Danmark tog klothoiden til sig. Man kunne overføre erfaringerne fra udlandet ved at introducere de udarbejdede tabelværker. Tillige var vejgeometrien på daværende tidspunkt i front med at introducere edb til sine beregninger. Dette indebar naturligvis, at klothoidens vej ind i dansk vejbygning yderligere jævnedes.

Blandt klotoidens begrænsninger er, at rykket, dvs. den tidsafledede af sideaccelerationen, ændrer sig momentant ved kørsel ind i eller ud af kurven. Under kørslen i klothoiden er rykket konstant. Tracéet designs med klothoider, der tager hensyn til den komfortbetingede begrænsning på størrelsen af rykket; men også størrelsen af den tidsafledede af rykket bør søges begrænset af hensyn til trafikanternes komfortable kørsel.

En yderligere begrænsning er, at det klothoiden forudsætter, at hastigheden holdes konstant under gennemkørslen. Denne forudsætning kan holde på frie vejstrækninger; men på eksempelvis ramper i et tilslutningsanlæg skal der ske en hastighedstilpasning samtidig med, at overgangskurven gennemkøres.

Begrænsningerne kan håndteres ved brug af mere avancerede overgangskurver, og med den regnekapacitet, nutidens PC-ere har, er det også muligt at tage disse hensyn i regning ved tracéeringen. I praksis sker det, hvor der er en synlig konsekvens for vejgeometrien eller følbare kørselsdynamiske effekter, fx ved udformningen af *bremsekurver*.

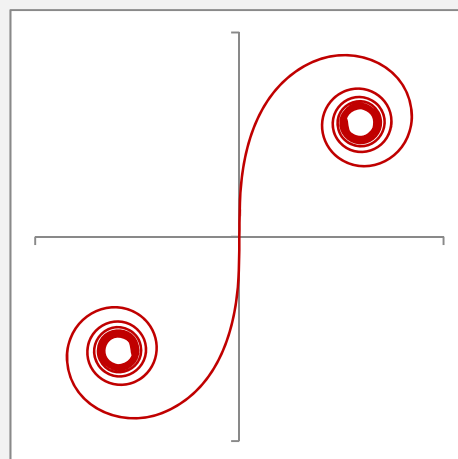
Klothoiden

Den almindeligste overgangskurve, klothoiden, er en spiral, hvis krumning vokser lineært i takt med spiralens længde, jævnfør Figur 53 samt Figur 10.¹

I klothoidens begyndelsespunkt, O , er krumningen 0, svarende til, at krumningsradius er uendelig stor. Herefter følger klothoiden parameterfremstillingen:

¹ Mere fyldestgørende omtaler af klothoider findes blandt andet hos Kasper et al. (49) og hos Osterloh (52).

Figur 53. Klothoide.



$$[130] \quad R \cdot L = A^2$$

hvor L er det aktuelle punkts afstand, målt langs kurven fra begyndelsespunktet, [m]

R er krumningsradius i punktet i afstanden L , [m]

A er en konstant, klothoideparameteren, der entydigt karakteriserer den anvendte klothoide, [m]

Det fremgår umiddelbart af ligningen, at alle klothoider er ligedannede. For $A = 1$ fås den såkaldte enhedsklothoide. Den er grundstammen i klothoidetabeller, eksempelvis (55). Alle længdemål ændres proportionalt med A ; vinkler ændres ikke.

Klothoiden er behandlet allerede i 1700-tallet af Euler¹ og kaldes derfor også Eulers spiral. Kurven kan tillige ses omtalt som Cornus spiral.²

Udledning af klothoiden

Klothoideligningen kan udledes ud fra to forskellige kriterier. Begge forudsætter, at kurven gennemkøres med konstant hastighed. Det ene tager afsæt i hensynet til kørselsdynamik, det andet i hensynet til kørselskomfort. Ingen af modellerne inddrager overhøjden.

Udledning med afsæt i kørselsdynamikken

Der betragtes den situation, hvor et automobil kører med en given hastighed ad en plan vejstrækning med konstant sidehældning. Betydningen af, at horisontalkurvens radius ikke er konstant, undersøges.

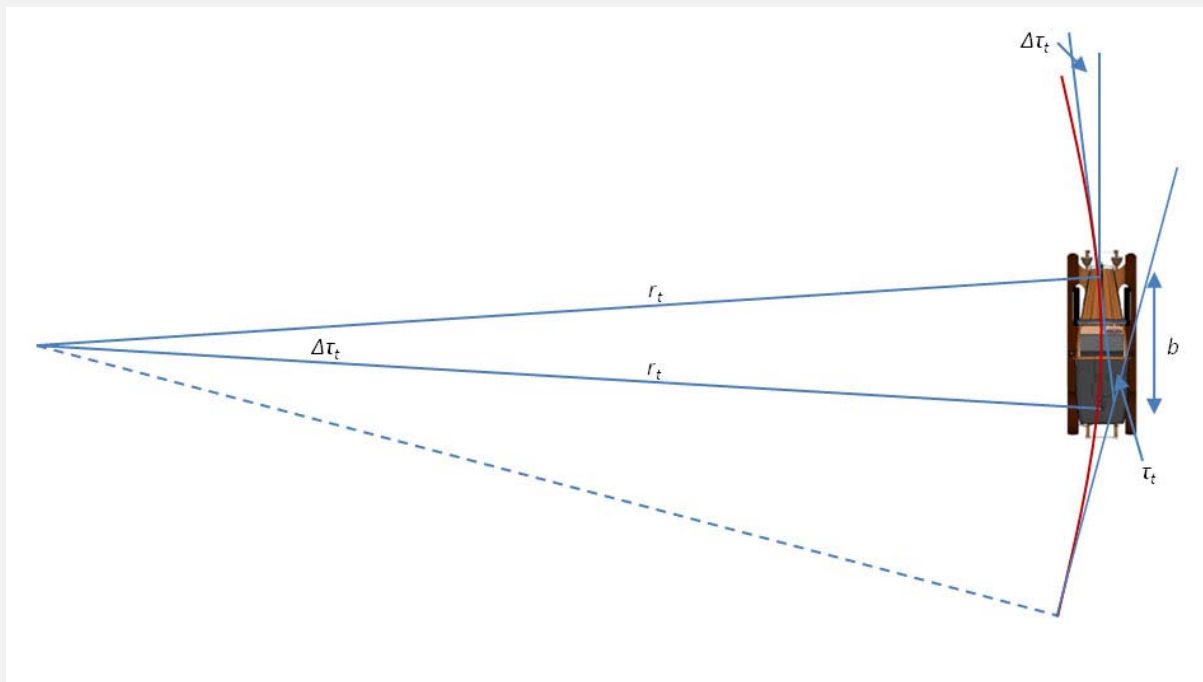
Et automobil kan ikke momentant køre fra retlinet bevægelse ind i en cirkelbue, da dette ville kræve, at forhjulene i ét punkt blev drejet vinklen $\Delta\tau$, hvor $\Delta\tau$ svarer til, at bilen kører med cirkelens radius. På samme vis kan et automobil ej heller momentant køre fra én cirkelbue med radius R_1 ind i en anden cirkelbue med radius R_2 . I begge tilfælde må forhjulenes vinkeldrejning tilvejebringes ved hjælp af en overgangskurve, jævnfør Figur 54.

Det antages, at trafikanten drejer køretøjets rat med en konstant vinkelhastighed, og at dette bevirker, at forhjulenes vinkel med køretøjets midtlinje vokser med en, ligeledes, konstant vinkelhastighed. Antagelserne er ikke helt korrekte, men holder med en rimelig nøjagtighed.

Der gælder derfor:

¹ Leonhard Paul Euler (1707-1783), schweizisk matematiker og fysiker.

² Marie Alfred Cornu (1841-1902), fransk fysiker.



Figur 54. Et automobils bevægelse gennem en overgangskurve

$$[131] \quad \Delta\tau_t = \omega \cdot t$$

hvor: t er tiden, der er forløbet, fra køretøjets forhjul forlod den rette linje [s]
 $\Delta\tau_t$ er forhjulenes vinkel med køretøjets midtlinje [rad]
 ω er den konstante vinkelhastighed, som forhjulene drejer med, [rad/s]

På samme tidspunkt, t , gælder endvidere:

$$[132] \quad l_t = v \cdot t$$

hvor: l_t er den kurvelængde, køretøjet har tilbagelagt til, [m]
 v er køretøjets konstante hastighed [m/s]

Endelig gælder det på samme tidspunkt, t :

$$[133] \quad r_t = \frac{b}{\tan \Delta\tau_t}$$

hvor: r_t er den øjeblikkelige krumningsradius af den kurve, automobilet gennemkører, [m]
 b køretøjets akselafstand [m]

For små værdier af forhjulenes drejningsvinkel, $\Delta\tau_t$, kan formel [20] omskrives:

$$[134] \quad r_t = \frac{b}{\tan \Delta\tau_t} \approx \frac{b}{\Delta\tau_t} = \frac{b}{\omega \cdot t} = \frac{b \cdot v}{\omega \cdot l_t}$$

hvoraf:

$$[135] \quad r_t \cdot l_t = R \cdot L = \frac{b \cdot v}{\omega} = \text{konstant} = A^2$$

hvor parametrene R og L er defineret i tilknytning til formel [17].

Udledning med afsæt i kørselskomforten

Trafikanterne har en hastighedsafhængig og komfortbetinget, øvre grænse for, hvor stor den tilladelige, ukompenserede sideacceleration, må være.

Denne sideacceleration må imidlertid ikke tilvejebringes på én gang, da trafikanterne tillige har en komfortbetinget grænse for, hvor stor tilvæksten i sideaccelerationen må være pr. tidsenhed. Tilvæksten i acceleration pr. tidsenhed betegnes rykket, k [m/s^3].

Køres med konstant hastighed, v , gennem en overgangskurve, der har længden L , og som forbin- der en ret linje med en cirkelbue med radius R , får sideaccelerationen tilvæksten, Δf :

$$[136] \quad \Delta f = \frac{v^2}{R}$$

Tiden, T , det tager at gennemkøre hele overgangskurven, er:

$$[137] \quad T = \frac{L}{v}$$

og det gennemsnitlige ryk under kørslen gennem overgangskurven, findes derfor:

$$[138] \quad k = \frac{\Delta f}{T} = \frac{v^2}{R \cdot T} = \frac{v^2}{R \cdot \frac{L}{v}} = \frac{v^3}{R \cdot L}$$

Kræves det, at rykket, k , er konstant gennem overgangskurven, kan følgende udtryk opstilles for sideaccelerationen til tiden t , hvor automobilet har gennemkørt strækningen l_t af overgangskurven og er nået til et punkt, der har krumningsradius r_t :

$$[139] \quad \frac{v^2}{r_t} = k \cdot t = \frac{v^2}{R \cdot T} \cdot t = \frac{v^2}{R \cdot \frac{L}{v}} \cdot \frac{l_t}{v} = \frac{v^2 \cdot l_t}{R \cdot L}$$

Heraf følger:

$$[140] \quad r_t \cdot l_t = R \cdot L = \frac{v^3}{k} = \text{konstant} = A^2$$

Anvendelse af klothoiden

Ældre tracéring tilstræbte retlinede forløb. Tracéets nødvendige retningsændringer blev tilvejebragt gennem relativt korte cirkelbuer.

I den sammenhæng indgik klothoiden som overgangskurver på begge sider af cirkelbuerne. Overgangskurverne skulle navnlig tjene til at give trafikanterne mulighed for at manøvrere komfortabelt gennem retningsændringen, sikre længde til at skabe den nødvendige overhøjde gennem cirkelbuen, samt give trafikanterne et tilfredsstillende, æstetisk indtryk af vejforløbet, jævnfør Figur 51.

Overgangskurvens længde var oftest kortest muligt under hensyntagen til disse forhold, og de to overgangskurver, før henholdsvis efter cirkelbuen, havde ofte samme klothoideparameter, A , således at kurverne var spejlbilleder af hinanden, jævnfør Figur 55.

I den mere »flydende« tracéring, der er fremherskende i dag, benyttes klothoiden i flere, forskellige kombinationer, jævnfør Figur 56. Det giver bedre mulighed for at samspasse vejforløb og landskab

Figur 55. Traditionel, symmetrisk anvendelse af klothoider som korte overgangskurver (røde) mellem retlinede strækninger (blå) og en (kort, højredrejet) cirkelbue (grøn).

MANGLER

MANGLER

Klothoiden optræder stadig som overgangskurve mellem en retlinet og en cirkulær strækning, om end dens længde ikke absolut søges gjort så kort som muligt, når der skal tages snævert hensyn til kørselskomfort og tilvejebringelse af overhøjde.

Klothoiden anvendes endvidere som overgangskurve mellem ensvendte cirkelbuer med forskellige radier. Her har den samme funktion som i det »almindelige« tilfælde med hensyn til kørselskomfort og med hensyn til et tilfredsstillende æstetisk udtryk. Klothoiden betegnes i dette tilfælde en *ægklothoide*.

Klothoiden optræder tillige som *vendeklothoider*, hvor modsat drejede kurver bevæger sig direkte over i hinanden uden et mellemliggende en ret linjestykke. Vendeklothoidens to klothoidgrene har naturligvis sammenfaldende tangent i klothoidernes begyndelsespunkt. Grene kan eventuelt have samme klothoideparameter, men dette er ikke et krav.

Vendeklothoidens længde skal være tilstrækkelig til at man på begge sider af hovedtangenterpunktet kan skabe den nødvendige ændring af overhøjden og sikre en komfortabel kørsel gennem kurven. Oftest vil længere overgangskurver dog give et resultat, der giver en æstetisk set bedre sampasning mellem landskabets former og vejtracéen.

Klothoide-følger optræder, når kurven opbygges af et antal klothoider, der går direkte over i hinanden. Klothoideparametrene vil være enten stigende eller aftagende gennem klothoide-følgen, og i hvert tangenterpunkt har de ægklothoider, der mødes, samme krumning og sammenfaldende tangeter. Den kørselsdynamiske konsekvens af at anvende klothoide-følger er naturligvis, at rykket, trafikkanterne udsættes for, ændres ved hver ny ægklothoide.

Flere simple kombinationer kan optræde; Figur 57 giver en tabellarisk opstilling.

I princippet kan man tænke sig en glidende, stigende eller aftagende, overgang af parameteren, svarende til at rykket gradvist ændres gennem kurven, og svarende til at kurven opbygges af en sekvens af infinitesimalt små ægklothoide. Overgangskurven vil i så fald ikke længere bestå af klothoider, men følger en anden veldefineret formel. En sådan kurve kan for så vidt godt anvendes til tracéring. Betragtningen kan lægges til grund for udformningen af fx *bremsekurver*, men anvendes ikke på almindelige vejstrækninger.

Figur 56. Den almindelige klothoide danner overgangskurve (rød) mellem en retlinet strækning (blå) og en cirkelbue (grøn). Ægklothoiden (orange) danner overgangskurve mellem to ensvendte cirkelbuer. Vendeklothoiden (rød) danner overgangskurve mellem modsat drejede cirkelbuer (grønne) med samme eller forskellig cirkelradius; klothoideparameteren kan som på figuren være ens på de to sider af vendeklothoidens hovedtangenterpunkt, T , men vendeklothoidens to grene kan også have forskellige klothoideparametre.

MANGLER

MANGLER

Figur 57. Forskellige kombinationer af ret linjestykke, cirkelbue og klothoidebue. (56)

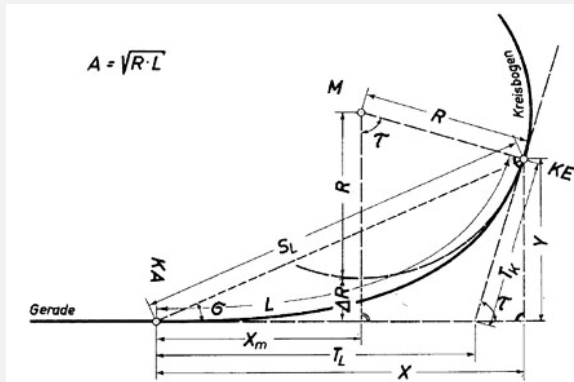
Gewöhnlicher Übergangsbogen				1
Verbundkurve				2
Scheiteltbogen				3
S-Kurve mit 1 Parameter				4
S-Kurve mit 2 Parametern				5
Parabelkurve				6
Ei-Linie				7
Doppelte Ei-Linie mit Hüllkreis				8
C-Kurve Gegenklotoiden R Hüllkreis = 0				9
Unvollständige Klotoiden L Hüllkreis = 0				10
Doppelte Ei-Linie mit innerem Verbindungskreis				11
Korkklotoid				12

Beregning

Klothoidens geometriske elementer

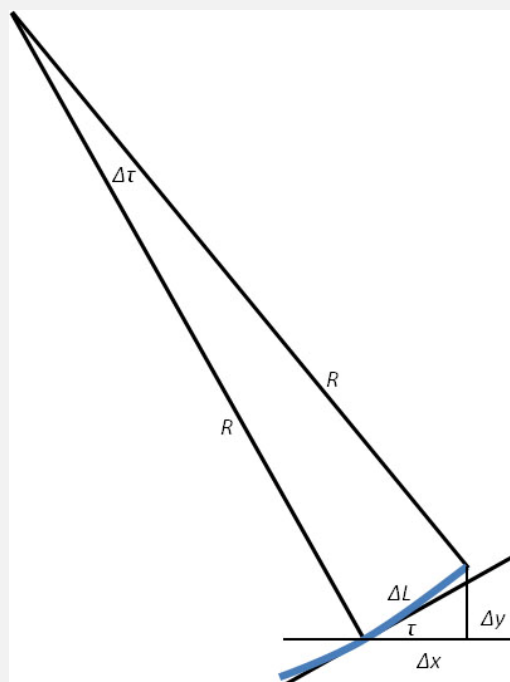
Klothoidetabellerne, der tidligere var basale for tracéringen, gav værdierne for en række af enhedsklothoidens geometriske elementer.

En række af de centrale elementer fremgår af Figur 58. Figuren opererer med et lokalt koordinatsystem, der har sit begyndelsespunkt i hoved- eller vendetangentens tangentialpunkt, O .



Figur 58. Klothoidens elementer. A: Klothoideparameteren. L: Klothoidens længde. R: Cirklens radius. S: Kordelængden fra begyndelsespunktet O til klothoidens endepunkt P. T_k : Den korte tangents længde. T_L : Den lange tangents længde. X: Abscissen til klothoidens endepunkt P. X_M : Abscissen til cirklens centrum M. Y: Ordinaten til klothoidens endepunkt P. ΔR : Indrykning. σ : Polarvinklen. τ : Tangentvinklen. Bemærk orienteringen af det anvendte koordinatsystem. (55)

Figur 59. Delelement af en klothoide.



Traditionelt regnes abscisseaksen ud af hovedtangente. Det lokale koordinatsystem, der anvendes i klothoidetabeller, er således orienteret anderledes end vejkoordinatsystemet; i vejkoordinatsystemet vil hovedtangente ligge på y -aksen til koordinatsystemet i klothoidens begyndelsespunkt. I det efterfølgende anvendes den notation, at koordinater i klothoidens lokale koordinatsystem angives ved understregning, fx ($\underline{X}_p, \underline{Y}_p$).

Figur 59 viser et infinitesimalt lille delelement af en klothoide med klothoideparameter A . Den øjeblikkelige krumningsradius betegnes R , og den øjeblikkelige tangentvinkel betegnes τ . Delelementets længde betegnes dL , og tilvæksten i tangentvinklen betegnes $d\tau$. Der gælder følgende:

$$[141] \quad d\tau = \frac{1}{R} \cdot dL = \frac{L}{A^2} dL$$

hvoraf man ved integration kan bestemme et udtryk for tangentvinklen:

$$[142] \quad \tau = \int_0^\tau d\tau = \int_0^L \frac{L}{A^2} \cdot dL = \frac{L^2}{2 \cdot A^2} = \frac{L}{2 \cdot R} = \frac{A^2}{2 \cdot R^2}$$

I et vilkårligt punkt på klothoiden bestemmes abscisse- og ordinat-tilvæksten, jævnfør Figur 59 af ligningsparret:

$$[143] \quad \begin{bmatrix} d\underline{X} \\ d\underline{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\tau \cdot dL \\ \sin\tau \cdot dL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\tau \cdot R \cdot d\tau \\ \sin\tau \cdot R \cdot d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\tau \cdot \frac{L}{2 \cdot \tau} \cdot d\tau \\ \sin\tau \cdot \frac{L}{2 \cdot \tau} \cdot d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\tau \cdot \frac{A \cdot \sqrt{2 \cdot \tau}}{2 \cdot \tau} \cdot d\tau \\ \sin\tau \cdot \frac{A \cdot \sqrt{2 \cdot \tau}}{2 \cdot \tau} \cdot d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}} \cdot d\tau \\ \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}} \cdot d\tau \end{bmatrix}$$

Substitueres τ ved udtryk [29] kan koordinaterne findes ved integration:

$$[144] \quad \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^L \cos \frac{L^2}{2 \cdot A^2} dL \\ \int_0^L \sin \frac{L^2}{2 \cdot A^2} dL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^\tau \frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}} d\tau \\ \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^\tau \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}} d\tau \end{bmatrix}$$

Disse Fresnel-integraler¹ løses ikke direkte, men gennem rækkeudvikling af de trigonometriske funktioner og efterfølgende integration af rækkernes enkelte led.

Holdes længden L som variabel findes koordinaterne af:

$$[145] \quad \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^L \cos \frac{L^2}{2 \cdot A^2} dL \\ \int_0^L \sin \frac{L^2}{2 \cdot A^2} dL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^L \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \left(\frac{L^2}{2 \cdot A^2} \right)^{2n} \right) dL \\ \int_0^L \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{L^2}{2 \cdot A^2} \right)^{2n+1} \right) dL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot L^{4n+1}}{(2n)! \cdot (4n+1) \cdot 2^{2n} \cdot A^{4n}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot L^{4n+3}}{(2n+1)! \cdot (4n+3) \cdot 2^{2n+1} \cdot A^{4n+2}} \end{bmatrix}$$

Holdes i stedet tangentvinklen τ som variabel, findes koordinaterne af:

$$[146] \quad \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\tau} \frac{\cos \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau \\ \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\tau} \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\tau} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\tau^{\frac{4n-1}{2}}}{(2n)!} \right) d\tau \\ \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\tau} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\tau^{\frac{4n+1}{2}}}{(2n+1)!} \right) d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot \tau^{\frac{4n+1}{2}}}{(4n+1) \cdot (2n)!} \\ \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot \tau^{\frac{4n+3}{2}}}{(4n+3) \cdot (2n+1)!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A \cdot \sqrt{2} \cdot \tau \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \tau^{2n}}{(4n+1) \cdot (2n)!} \\ A \cdot \sqrt{2} \cdot \tau \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \tau^{2n+1}}{(4n+3) \cdot (2n+1)!} \end{bmatrix}$$

Rækkesummerne i formlerne [32] og [33] konvergerer pænt, og rækkeudviklingen kan standses, når der ikke længere optræder ændringer i betydende cifre. Det vil oftest være tilfældet efter beregning af en håndfuld led.²

Når de lokale koordinater (X_P, Y_P) til et klothoidpunkt er bestemt, følger de øvrige elementer i Figur 58 af enkle geometriske betragtninger. Disse elementer anvendes navnlig ved simpel afsætning af klothoidpunkter i marken.

Koordinaterne til cirkelens centrum, M , findes af:

$$[147] \quad \begin{bmatrix} \underline{X}_M \\ \underline{Y}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{X}_P - R \cdot \sin \tau \\ \underline{Y}_P + R \cdot \cos \tau \end{bmatrix}$$

Indrykningen, ΔR , bestemmes af:

$$[148] \quad \Delta R = \underline{Y}_M - R = \underline{Y}_P + R \cdot \cos \tau - R$$

¹ Augustine-Jean Fresnel (1788-1827), fransk fysiker.

² Formlerne [32] og [33] er praktisk anvendelige i det interval, der er aktuel ved vejbygning, dvs. så længe klothoidelængden $L < 2 \cdot A$, svarende til at tangentvinklen $\tau < 2$ radian, jævnfør formel [29]. Ved større klothoidelængder, antager parametre i formlen værdier, der (opløftet i de aktuelle potenser) ligger ud over grænsen af det, som selv regneark formår at håndtere.

I stedet kan klothoider med store længder, L , beregnes ved numerisk integration på grundlag af formel [30], idet der anvendes passende små tilvækster, ΔL eller $\Delta \tau$, i de enkelte trin. Klothoiden figur [9] er tegnet på grundlag af en sådan numerisk integration.

Selve klothoiden konvergerer mod punktet $\underline{X}_P = \underline{Y}_P = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \sqrt{\pi}$.

Længderne af den korte og den lange tangent findes:

$$[149] \quad T_K = \frac{Y_P}{\sin \tau}$$

henholdsvis:

$$[150] \quad T_L = X_P - Y_P \cdot \cot \tau$$

Endelig gælder det om de polære koordinater til klothoidepunktet, at længden af korden, S_{OP} , er:

$$[151] \quad S_{OP} = \sqrt{X_P^2 + Y_P^2}$$

og at polarvinklen, σ_P , er:

$$[152] \quad \sigma_P = \arctan \frac{Y_P}{X_P}$$

Fortegniskonvention

Det traditionelle, lokale klothoide-koordinatsystem, XY -systemet, er som nævnt orienteret anderledes end vejkoordinatsystemet, xy -systemet, og udtrykkene [31]-[39] skal derfor transformeres.

Ydermere gælder, at der skal tages hensyn til, dels om klothoiden er overgangskurve til en højre- eller en venstredrejet cirkelbue, dels om man i stationeringsretningen bevæger sig mod eller væk fra cirkelbuen, jævnfør Figur 60.

På samme måde som det var tilfældet ved cirkelbuen fastlægges en fortegniskonvention:

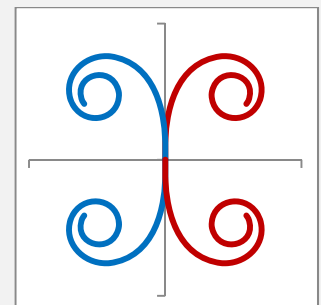
- Radius, R , regnes positiv, når klothoidegrenen drejer mod højre set i stationeringsretningen, og negativ, når klothoidegrenen drejer mod venstre.
- Længden, L , fastsættes som $L = S_P - S_O$ og regnes altså positiv for stationeringer, der er større end den stationering, der svarer til begyndelsespunktet ($S_P > S_O$) og negativ for stationeringer, der ligger før begyndelsespunktet, O .

Fastlæggelse af klothoidens punkter

Stationeringspunkter på en klothoide vil være fastlagt, når man kender:

- Klothoidens parameter, A .
- Koordinaterne (X_O, Y_O) til klothoidens begyndelsespunkt O .
- Stationeringen S_O , der svarer til klothoidens begyndelsespunkt.
- Retningsvinklen, φ_O , til den del af klothoidens hovedtangent, der svarer til stigende stationering.
- Angivelse af, hvilken klothoidegren, der er tale om; denne angivelse kan i praksis, jævnfør ovenfor, ske ved at regne R og L med fortegn.

Figur 60. Højre- og venstredrejede klothoider med samme A^2 -værdier. Udtryk for xy -koordinaterne skal tage hensyn til, hvilken af de fire klothoidegrene, der arbejdes med.



Ud fra disse størrelser kan, jævnfør formel [2] og formel [32], koordinaterne til punktet, P , der ligger på klothoiden og har stationeringen S_P , bestemmes af:

$$[153] \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\left(\varphi_O - \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\varphi_O - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\varphi_O - \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\varphi_O - \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{R}{|R|} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (S_P - S_O)^{4n+3}}{(2n+1)! \cdot (4n+3) \cdot 2^{2n+1} \cdot A^{4n+2}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (S_P - S_O)^{4n+1}}{(2n)! \cdot (4n+1) \cdot 2^{2n} \cdot A^{4n}} \end{bmatrix}$$

idet det bemærkes, at såvel abscissen som ordinaten skifter fortegn, når L ændrer fortegn.

Størrelsen af tangentvinklen $|\tau_P|$ i punktet P bestemmes tilsvarende af formel [29]. Afhængigt af i hvilket kvadrant, punktet P befinder sig, skal man, for at finde retningsvinklen, φ_O , til stationeringslinjen i punktet P , subtrahere eller addere tangentvinklen fra henholdsvis til hovedtangens retningsvinkel, φ_O , med det overordnede koordinatsystems X -akse, jævnfør Figur 60.

Da stationeringslinjen falder sammen med vejkoordinatsystemets y -akse i punktet P , vil vejkoordinatsystemet have vinkeldrejningen θ_P i forhold til XY -koordinatsystemet:

$$[154] \begin{aligned} \theta_P &= \varphi_O - \frac{R}{|R|} \cdot \frac{S_P - S_O}{|S_P - S_O|} \cdot |\tau_P| - \frac{\pi}{2} + 2 \cdot m \cdot \pi \\ &= \varphi_O - \frac{R}{|R|} \cdot \frac{S_P - S_O}{|S_P - S_O|} \cdot \frac{(S_P - S_O)^2}{2 \cdot A^2} + 2 \cdot m \cdot \pi \end{aligned}$$

hvor m er et heltal, der får værdien af θ_P til at ligge i intervallet $[0; 2 \cdot \pi[$.

Parametrene, der fastlægger klothoiden, A , (X_O, Y_O) , S_O og φ_O , kan fastlægges, når der kendes punkter på eller tangenter til klothoidestykket. Fastlæggelsen er ikke altid helt simpel. Den sker ved linjeføringsberegningen.

Valg af klothoideparameter

Når klothoiden anvendes som overgangskurve, er den tilstødende cirkels radius kendt. Det gælder da om at vælge en klothoideparameter, A , således at klothoiden får en passende længde.

Der er fem hensyn, som skal iagttages her, og som fastlægger et interval, som klothoides parameter bør ligge i.

Hensyn til tilvejebringelse af overhøjde

Nødvendig overhøjde skal kunne tilvejebringes gennem overgangskurven. Overhøjden fremkommer ved, at den yderste kørebanekant hæves i forhold til den inderste. Kravet er, at den relative stigning, Δi , mellem kørebanens yder- og inderkant skal holde sig under en given grænse, $\Delta i_{\max}$. Kravet medfører, at klothoidens længde, L , skal respektere udtrykket:

$$[155] \quad L \geq \frac{\Delta i \cdot B}{\Delta i_{\max}}$$

hvor: Δi er den relative stigning [-], som på overgangsstrækningen skal tilvejebringes mellem kørebanekanterne

B er afstanden mellem kørebanekanterne [m]

Ved overgang fra en retlinet strækning med normalt, tagformet tværprofil til ensidigt tværfald i en cirkelkurve, gælder:

$$[156] \quad \Delta i = i = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot R} \leq i_{\max}$$

hvor: i er vejoverfladens ensidige tværfald i cirkelbuen [-]
 v er den hastighed, køretøjer skal kunne køre med på strækningen [m/s]
 g er tyngdeaccelerationen [m/s²]
 R er cirkelbuens radius [m]
 $i_{\max}$ er den øvre grænse for tværfaldets størrelse [-]

Kombineres udtrykkene [17], [28] og [29] findes for den nævnte situation:

$$[157] \quad A = \sqrt{R \cdot L} \geq \sqrt{R \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot R} \cdot \frac{B}{\Delta i_{\max}}} = v \cdot \sqrt{\frac{B}{2 \cdot g \cdot \Delta i_{\max}}}$$

Størrelsen af $\Delta i_{\max}$ er i de danske vejregler sat til: $\Delta i_{\max} = 6 \text{ ‰}$. (15)

Hensyn til kørselsdynamik

Sammenligning af formlerne [22] og [27] rejser spørgsmålet om hvilke af de indgående konstanter – forholdet mellem køretøjets akselafstand, b , og forhjulenes vinkeldrejningshastighed, ω , henholdsvis det acceptable ryk, k – der er bestemmende for fastsættelsen af klothoideparametere, når det er givet, hvilken hastighed der skal kunne køres med.

Sammenstilles formlerne findes følgende komfortbetingede udtryk for trafikanternes adfærd gennem kurven:

$$[158] \quad v_{\emptyset} \leq \sqrt{\frac{b \cdot k_{\max}}{\omega}}$$

hvor $v_{\emptyset}$ er vejstrækningens ønskede hastighed
 $k_{\max}$ er grænseværdien for det acceptable [m/s³]

Der findes så vidt vides ikke angivelser af nogen grænser for ω . Ved kørsel på en almindelig vejstrækning er den nødvendige drejning af forhjulenes vinkel, τ , der betinges af rykket, imidlertid under alle omstændigheder så lille, at de kørselsdynamiske hensyn kan tilgodeses alene på grund af køresporenes bredde. (51) Det betyder, at det alene er ved kørsel ved små hastigheder og små radier, fx ved kørsel om gadehjørner, at størrelsen af ω har en afgørende betydning.

Hensyn til komfort

Komfortabel kørsel gennem klothoiden fordrer, at rykket, k , som trafikanterne udsættes for, er acceptabelt ved den hastighed, v , køretøjer skal kunne køre med på strækningen.

Omskrives udtrykket [27] findes:

$$[159] \quad A = \sqrt{R \cdot L} = \sqrt{\frac{v^3}{k}} \geq \sqrt{\frac{v^3}{k_{\max}}}$$

Størrelsen af $k_{\max}$ er i de danske vejregler sat til: $k_{\max} = 0,5 \text{ m/s}^3$. (15)

Hensyn til æstetik

Klothoiden skal have en tilfredsstillende optisk virkning, således at trafikanten får et tydeligt indtryk af, at køretøjet nærmer sig en kurve. Erfaringsmæssigt kræver dette, at vinkeldrejningen, τ , skal have en mindste størrelse på $\tau_{\min} = 3^\circ$.

Omskrives udtrykket [29] findes:

$$[160] \quad A = \sqrt{R \cdot L} = \sqrt{2 \cdot R^2 \cdot \tau} \geq R \cdot \sqrt{2 \cdot \tau_{\min}} \approx \frac{R}{3}$$

De danske vejregler (15) anfører endvidere, at det i landskaber, der er flade eller er præget af store linjer kan være et problem, hvis en vendeklothoide bliver for kort, da vejforløbet i så fald

kan komme til at fremtræde meget slynget. Vejreglerne anbefaler at indlægge en kort retlinet strækning mellem to modsat vendte klothoider.

Vejreglerne (15) anfører endvidere, at en meget stor klothoideparameter benyttet på hver side af en cirkelbue kan føre til, at cirkelbuen bliver så kort, at det kan give indtryk af et knæk på linjeføringen.

Hensyn til sikkerhed

De danske vejregler (15) angiver, at det kan være et problem, at anvende klothoider med store klothoideparametre som selvstændige tracersinglementer på veje med små horisontalradier. Årsagen er, at vejen ender med at krumme langt kraftigere end det ser ud til ved indgangen til kurven. Vejreglerne anfører derfor, at klothoider med klothoideparameter så stor som $A = R$ kun bør anvendes som selvstændige tracersinglementer, når vejens horisontalradier, R , er større end 1000 m.

Den kubiske parabel

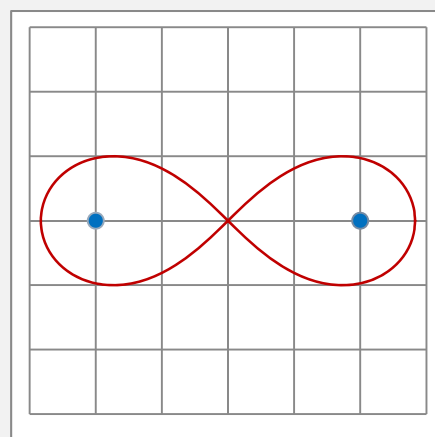
Kubiske parabler er tidligere anvendt som overgangskurver. Anvendelsen tilskrives Rankine¹.

Den kubiske parabel udgør en første ordens tilnærmelse til klothoiden; den fremkommer ved alene at medtage første led i rækkeudviklingerne i formlerne [32] og [33], fx:

$$[161] \quad \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \underline{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^L \cos \frac{L^2}{2 \cdot A^2} dL \\ \int_0^L \sin \frac{L^2}{2 \cdot A^2} dL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot L^{4n+1}}{(2n)! \cdot (4n+1) \cdot 2^{2n} \cdot A^{4n}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot L^{4n+3}}{(2n+1)! \cdot (4n+3) \cdot 2^{2n+1} \cdot A^{4n+2}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{L}{L^3} \\ \frac{L^3}{6 \cdot A^2} \end{bmatrix}$$

Lemniskaten

En anden overgangskurve, der tidligere er anvendt, er Bernoulis² lemniskat. Den er et specialtilfælde af Cassinis³ ovaler, og den kan konstrueres mekanisk som en såkaldt trestangs-kurve⁴.



Figur 61. Lemniskat.

¹ William John Macquorn Rankine (1820-72), skotsk ingeniør og fysiker.

² Jakob Bernoulli (1654-1705), schweizisk matematiker.

³ Giovanni Domenico Cassini (1625-1714), italiensk-fransk matematiker, astronom, ingeniør og astrolog.

⁴ Trestangs-kurver er plane, geometrisk bestemte figurer, der fastlægges af tre forbundne linjestykker (stænger). Linjestykkerne AB, BC og CD er forbundet i punkterne B henholdsvis C. Linjestykkerne har længderne $|AB| = |CD| = a\sqrt{2}$ henholdsvis $|BC| = 2 \cdot a$. Når A og D fastholdes i den indbyrdes afstand $2 \cdot a$, og de tre forbundne linjestykker bevæger sig i planen, således at BC krydser AC, vil midtpunktet, M, af linjestykket BC beskrive en lemniskat.

Lemniskaten har form som et 8-tal eller et ∞ -tegn, jævnfør Figur 61. Den er defineret som det geometriske sted, hvor produktet af afstandene fra to brændpunkter, F_1 og F_2 , er lig med en konstant, nemlig:

$$[162] \quad |PF_1| \cdot |PF_2| = \left(\frac{|F_1 \cdot F_2|}{2} \right)^2$$

Indlægges et koordinatsystem med origo i lemniskatens krydsningspunkt og med akser sammenfaldende med tangenterne i krydsningspunktet kan lemniskaten skrives i polære koordinater, jævnfør Figur 62:

$$[163] \quad s = s_{\max} \cdot \sqrt{\sin(2 \cdot \sigma)}$$

hvor s er kordelængden fra lemniskatens krydsningspunkt til det pågældende lemniskatpunkt
 $s_{\max}$ er kordelængden til lemniskatens fjernest beliggende punkt
 σ er polarvinklen til det pågældende lemniskatpunkt

Bemærk relationen mellem tangentvinklen, τ , og polarvinklen, σ :

$$[164] \quad \tau = 3 \cdot \sigma$$

Af formel [50] kan udledes:

$$[165] \quad ds = s_{\max} \cdot \frac{\cos(2 \cdot \sigma)}{\sqrt{\sin(2 \cdot \sigma)}} \cdot d\sigma = dl \cdot \cos(2 \cdot \sigma)$$

hvor dl er tilvæksten i buelængden, når polarvinklen øges $d\sigma$

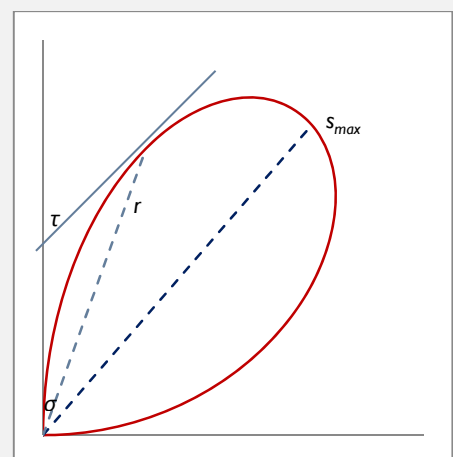
Heraf findes:

$$[166] \quad \frac{dl}{d\sigma} = \frac{s_{\max}}{\sqrt{\sin(2 \cdot \sigma)}} = \frac{s_{\max}^2}{s}$$

Da tangentvinklen $\tau = 3 \cdot \sigma$, findes krumningsradius, ρ , i det aktuelle lemniskatpunkt:

$$[167] \quad \rho = \frac{dl}{d\tau} = \frac{1}{3} \cdot \frac{dl}{d\sigma} = \frac{s_{\max}^2}{3 \cdot s}$$

Lemniskatens krumningsradius er altså omvendt proportional med korden, s :



Figur 62. Korder og vinkler i lemniskaten. Bemærk, at tangentvinklen, τ , og polarvinklen, σ , forholder sig således til hinanden: $\tau = 3 \cdot \sigma$.

$$[168] \quad \rho \cdot s = C$$

altså en egenskab, der minder meget om klothoidens, jævnfør formel [17]. Lemniskaten vil da også være nært sammenfaldende med en klothoide med klothoideparamter:

$$[169] \quad A = \frac{s_{\max}}{\sqrt{3}}$$

I vejkoordinatsystemet findes lemniskatens retvinklede xy -koordinater:

$$[170] \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot \sin \sigma \\ s \cdot \cos \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{\max} \cdot \sqrt{\sin(2 \cdot \sigma)} \cdot \sin \sigma \\ s_{\max} \cdot \sqrt{\sin(2 \cdot \sigma)} \cdot \cos \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\sin(2 \cdot \sigma)} \cdot \sin \sigma \\ A \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\sin(2 \cdot \sigma)} \cdot \cos \sigma \end{bmatrix}$$

idet polarvinklen $\sigma \in [0; \pi/2]$ for lemniskatgrenen i første kvadrant.

Mens koordinaterne til lemniskatens punkter således følger regulære formler, vil buelængden, L , være udtrykt ved et elliptisk integral.

Bremsekurver

Klothoiden, og dens tilnærmelser, tager sigte på at sikre trafikanten en kørselsdynamisk komfortabel bevægelse under en jævn retningsændring ved kørsel med konstant hastighed.

Forudsætningen om konstant hastighed gælder kun ved kørsel på almindelige vejstrækninger.

Ved eksempelvis motorvejsramper skal hastigheden ændres kontrolleret og jævnt. Når dette skal ske samtidig med at køretøjet ændrer retning, er de kørselsdynamiske vilkår anderledes, og den mest komfortable tracé består derfor ikke af cirkler og klothoider. Konkrete eksempler er tilslutningsramperne i toplanskryds såsom B-anlæg eller S-anlæg samt forbindelsesramper i et trompetanlæg eller et kløverbladsanlæg. Samme betragtning gælder i forbindelse med bremseheller, herunder klumpheller, på sekundærvejen i et vejkryds.

De kurver, det er teoretisk rigtigt at anvende i disse situationer, betegnes bremsekurver – også når de ligger på accelerationsstrækninger.

De ændrede forudsætninger, der gælder ved bremsekurver, er navnlig, at der skal sikres friktion mellem køretøjets dæk og vejoverfladen til den deceleration eller acceleration, der er nødvendig, samtidig med at der skal være tilstrækkelig sidefriktion til at gennemføre retningsændringen. Endvidere skal det iagttages, at det ryk, der påvirker trafikanten, virker såvel på langs som på tværs af kørselsretningen.

Et tredje vilkår er, at den kurveradius, der kan anvendes, ændrer sig gennem kurven; den vil afspejle centripetalaccelerationen og vil således være proportional med kvadratet på den aktuelle hastighed. Kombineret med, at friktionen skal fordeles på hastighedsændringen og retningsændringen, betyder det, at kurveradius i et givet punkt (med en given, forudsat hastighed) ikke kan være helt så lille som ved kørsel med konstant hastighed.

Endelig gælder som et fjerde hensyn er, at anlæggene, navnlig tilslutnings- og forbindelsesanlæg, samtidig skal udformes med hensyn til at begrænse såvel arealforbruget som behovet for at indlægge et ekstra kørespor på eller under anlæggets broer.

Den præcise, teoretiske form for bremsekurver kan udledes, men kræver at friktionsegenskaberne hastighedsafhængighed er entydigt beskrevet. Oftest vil man på grundlag af nødvendige horisontalkurveradier ved karakteristiske hastigheder på en rampes hastighedsprofil fastlægge et tilnærmet forløb sammensat af en sekvens af de almindelige linjeføringslementer.

Andre linjeføringskurver

Nogle tracéer vil på delstrækninger være bundet op på et allerede fastlagt tracé. Det gælder, at eksempelvis ramper på motorveje skal fra- eller tilgrene motorvejens kørespor på en kontrolle-ret vis, således at de sikres, at flettende trafikanter kan orientere sig om bagfra kommende trafik i eget spor såvel som i det kørespor, der skal flettes med.

Det stiller krav til såvel linjeføring som længdeprofil. Rampestrækningens længdeprofil skal indpasses, så det rampens ligger i naturlig forlængelse af motorvejens kørespor i de enkelte tværsnit. Rampens linjeføring fastlægges tilsvarende over en strækning som en kile i forhold motorvejstracéen, dvs. således at afstanden øges henholdsvis mindskes lineært.

Paralleller til en cirkelbue udgør naturligvis selv cirkelbuer; men hverken parallellinjer eller kilelinjer til en klothoide er selv klothoider. Selv om det kørselsdynamiske forløb således ikke er ideelt, er der ved de kurvedimensioner tale om afvigelser, som ligger inden for spillerummet af trafikanternes egne manøvre, og som ikke påvirker trafikanternes komfortoplevelse.

Herudover kan andre kurver end de allerede beskrevne naturligvis anvendes i tracéringen og er blevet det i særlige situationer, hvor vilkårene har tilsagt det. Det kan være ved behov for en indpasning under snævre forhold eller for at opnå et særligt samspil med arkitektoniske kvaliteter, typisk i et byrum, fx en pladsdannelse.

Det er væsentligt, at kurverne ikke har knæk – de skal med andre ord være differentierbare – på det kurvestykke, der anvendes.

Det er endvidere praktisk, at kurverne kan beskrives matematisk, således at det er muligt fx gennem afsætningsdata at specificere dem overfor den entreprenør, der skal udføre vejanlægget i marken.

Endelig bør sådanne kurver vurderes, og eventuelt analyseres, kørselsdynamisk, således at det er eftervist, at det er muligt at gennemkøre dem sikkert og komfortabelt ved den forudsatte hastighed.

Som eksempler på sådanne andre kurver, der kan anvendes i tracéringen, omtaler Lorenz (56) blandt andet *spline*-funktioner, samt en familie af »klothoider med to parametre«:

$$[171] \quad A^{n+1} = R \cdot L^n$$

Figur 63. Sergelstorg i Stockholm har form som en superellipse. Nord vender opad.
Billede fra Google Earth.



Et tredje eksempel er den superellipse, som Piet Hein¹ har beskrevet, jævnfør Figur 63:

$$[172] \quad \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = \text{konstant}$$

hvor $n > 2$

Linjeberegning

Før beregning af linjeføringens enkelte stationeringspunkter kan ske, skal de enkelte linjeføringselementer, rette linjestykker, cirkelbuer og klothoidebuer, være fastlagt. Fastlæggelsen indebærer, at alle linjeføringselementernes parametre er bestemt, og at linjeføringens tangentpunkter og dens endepunkter er bestemt, således at man for hvert af disse punkter kender eller kan beregne følgende fire oplysninger:

- Punktets X_n -koordinat
- Punktets Y_n -koordinat
- Krumningsradius, R_n , i punktet, inklusive fortegn i henhold til fortegnskonventionen
- Linjeføringens tangentvinkel, θ_n , i punktet

hvor indeks $n = 0$ refererer til linjeføringens begyndelsespunkt, og indeks $n = N$ refererer til linjeføringens endepunkt, der samtidig er slutpunkt for det sidste af linjeføringens N elementer.

Når disse hovedpunkter og parametre for linjeføringselementerne er bestemt, kan koordinaterne til linjeføringens enkelte stationeringspunkter beregnes, jævnfør formeludtryk i det foregående.

Resultatet af beregningen af hovedpunkterne kan eksempelvis rumme de informationer, der er skitseret i Figur 64.

Udgangspunktet for beregningen er, at man har et billede af, den sekvens af linjeføringselementer, som linjeføringen er sammensat af. Billedet kommer fra skitser, man har gjort sig på et kort i passende målforhold over det område, vejstrækningen skal løbe i gennem. Sekvensen angiver, hvordan retlinede strækninger cirkelbuer og klothoider følger efter hinanden, når linjeføringen gennemkøres i stationeringsretningen.

Element	Tangentpunkt			Parametre			Cirkelcentrum		Tangentskæring		□
	Station [m]	X [m]	Y [m]	L [m]	R [m]	A [m]	X [m]	Y [m]	X [m]	Y [m]	
1	-150,80	277597,96	43174,82	L	150,80						89,108
2	0,00	277600,32	43325,60	K	128,57	300,00			277601,66	43411,34	87,351
3	128,57	277606,26	43453,99	C	139,20	-700,00	278302,22	43378,89	277613,76	43523,42	78,141
4	267,78	277634,82	43590,00	K	64,61	212,66			277641,31	43610,53	70,690
5	332,38	277656,18	43650,96	K	20,35	63,80			277660,87	43663,70	70,782
6	352,74	277662,88	43670,18	C	36,52	200,00	277471,91	43729,59	277668,32	43687,66	77,941
7	389,26	277670,50	43705,85	K	50,00	100,00			277672,48	43722,42	87,958
8	439,26	277672,28	43755,78	L	30,00						90,344
9	439,26	277672,10	43785,78								

Figur 64. Skitse af resultattabel fra en linjeberegnings hovedpunktsberegning. Ud over koordinater til tangentpunkter og parametre for de enkelte linjeføringselementer er medtaget koordinater til centrum for cirkelbuer samt til tangenternes skæringspunkter. Bemærk, at tangentens retningsvinkel er angivet i decimaler af den seksagesimale graddeling ($\pi = 180^\circ$). Data fra (57).

¹ Piet Hein (1905-1996), dansk forfatter og opfinder.

Skitsen, der danner afsættet, kan rumme nogle elementer, der ligger helt fast på kortet. Det kan være i forbindelse med kryds i ét eller to plan, eller ved strækningens anslutninger til det eksisterende vejnet. Imidlertid vil de fleste linjeføringselementer i udgangspunktet have en del frihedsgrader. Disse frihedsgrader skal elimineres ved linjeberegningen.

Linjeberegningen indebærer, at man inddrager eller udelader oplysninger om linjeføringen i et sådant omfang, at det enkelte linjeføringselement netop kan fastlægges. Beregnes linjeføringen manuelt eller ved brug af ældre programmer, foretager brugeren disse valg på grundlag af en vægtning af kørselsdynamiske og æstetiske hensyn tilsat lidt erfaring og intuition.

Klassisk, manuel beregning indebærer, at man først fokuserer alene på de rette linjestykker og cirkelbuerne, de såkaldte hovedelementer. Skæringspunkterne mellem de rette linjestykker bestemmes. Herefter kan cirkelbuerne fastlægges *foreløbigt* med et centrum og en radius, og med de tilhørende tangentpunkter. Når overgangskurverne indlægges, reduceres cirkelradierne med den indrykning, ΔR , som den klothoide, der ønskes anvendt, giver anledning til, jævnfør Figur 58. Cirkelcentrum forskydes tilsvarende, og endelig fastlægges tangentpunkterne mellem retlinede strækninger og klothoider henholdsvis mellem klothoider og cirkler. Beregningen understøttes af hensigtsmæssigt udformede skemaer, der samler de indgående parametre på en struktureret måde, se fx (58).

Moderne computerstøttede projekteringsprogrammer kan fastlægge parametre for linjeførings-elementerne på grundlag af indbyggede algoritmer. Ved at anvende sådanne programmer undgår man nogle mere banale fejlkilder, og man letter selve beregningsarbejdet. Men brug af computerstøttede projekteringsprogrammer stiller ikke mindre krav om en grundig og kritisk vurdering af kvaliteten af den linjeføring, der fremkommer.

Geometrisk bestemthed

Et linjeføringselement siges at være *geometrisk bestemt*, når det er netop fastlagt, således at alle punkter på elementet kan koordinatbestemmes og alle beskrivende parametre enten er kendt eller kan beregnes.

Et simpelt eksempel på et geometrisk bestemt linjeføringselement er et ret linjestykke, hvor begyndelsespunktets og endepunktets koordinater er kendt. Her kan koordinaterne til alle mellemliggende punkter beregnes. Det samme gælder linjestykkets længde og dets retningsvinkel i forhold til koordinatsystemet.

Et andet eksempel er en cirkelbue med kendt begyndelsespunkt, kendt endepunkt og kendt radius (angivet med fortegn i henhold til fortegnskonventionen). Her kan koordinaterne til mellemliggende punkter beregnes. Det samme gælder buelængden og koordinaterne til cirkelns centrum.

Et linjeføringselement er *geometrisk ubestemt*, når der mangler én eller flere af de nødvendige oplysninger. Den geometriske ubestemthed medfører, at linjeføringselementet ikke kan fastlægges entydigt, og at dets punkter ikke kan koordinatsættes, og at de beskrivende parametre ikke kan beregnes.

Det rette linjestykke, der alene er fastlagt med sit begyndelsespunkt og sin længde, er geometrisk ubestemt. Linjestykket kan så at sige drejes frit om begyndelsespunktet. Der er behov for at fastlægge linjestykkets retningsvinkel, for at gøre det geometrisk bestemt.

Cirkelbuen, der alene er fastlagt med begyndelsespunkt, endepunkt og den numeriske størrelse af radius, er ligeledes geometrisk ubestemt. Der findes to løsninger, en venstre- og en højredrejet, svarende til, at cirkelns radius kan være positiv eller negativ.

Et linjeføringselement er omvendt *geometrisk overbestemt*, når der er fastlagt én eller flere overskydende oplysninger. Overbestemmelsen indebærer, at koordinatbestemmelsen af øvrige punkter og beregningen af øvrige beskrivende parametre kan tilrettelægges på flere måder, men

at disse måder ikke nødvendigvis vil give eksakt samme resultater. Der kommer så at sige til at optræde spændinger i bestemmelsen. For at undgå dette, vil der være behov for at se bort fra de overskydende oplysninger i beregningen.

Hvis det om det rette linjestykket med kendt begyndelsespunkt og kendt endepunkt tillige er fastlagt, at linjestykket skal have en kendt længde, så er elementet geometrisk overbestemt. Medmindre koordinatdifferencerne og den fastlagte længde ved et slumptræf skulle udgøre et pythagoræisk talsæt, vil der være en lille afrundingsfejl i (mindst) én af de givne oplysninger.

Betragtes i stedet to naboelementer i en linjeføring, gælder, at det første linjeføringselements endepunkt skal falde sammen med det sidste elements begyndelsespunkt, og at de to elements tangenter i dette punkt tillige skal være sammenfaldende. Matematisk set er der tale om, at den sammensatte kurve, som linjeføringen udgør, skal være to gange differentiabel.

Når de to linjeføringselementer under ét skal være geometrisk bestemt, så skal disse vilkår for tangentpunktet inddrages. Man kan sige, at hvis tangentpunktet og tangentvinklen er bestemt gennem de fastlagte oplysninger for det ene linjeføringselement, så udgør tangentpunktet og tangentvinklen fastlagte oplysninger i forhold til det andet element. Denne betragtning gælder i nogle tilfælde helt bogstaveligt ved linjeberegningen, således at beregningen kan gennemføres successivt for linjeføringselementerne; i andre tilfælde er det nødvendigt at behandle to eller flere linjeføringselementer under ét.

Vilkåret indebærer, at der er nogle følger af linjeføringselementer, der ikke er gangbare. Det helt indlysende eksempel er to rette linjestykker, der ikke udgør en umiddelbar forlængelse af hinanden. Ligeså indlysende gælder det for cirkelbuer, der måtte være fastlagt, så den ene cirkel ligger helt inden i den anden.

Generelt gælder det, at sekvensen af linjeføringselementer må rumme de fornødne frihedsgrader til at dreje, forskyde, forstørre eller formindske elementerne i et sådant omfang, at naboelementer kan bringes til at tangere hinanden.

Betragtes eksempelvis to naboelementer på en linjeføring, en cirkelbue og et ret linjestykke, så vil de to elementer sammen være geometrisk bestemt, hvis man har fastlagt cirkelens radius (med fortegn), cirkelens begyndelsespunkt og tangentvinklen i dette punkt samt det linjestykkets endepunkt. Betragtningen indebærer, at længden af cirkelbuen og af linjestykket samt linjestykkets retningsvinkel, må afpasses, og vil være bestemt af tangeringen. Alternativt vil de to elementer sammen være geometrisk bestemt, hvis man har fastlagt cirkelens begyndelsespunkt linjestykkets endepunkt samt og tangentvinklerne i disse to punkter. I dette tilfælde, må cirkelens radius samt længden af cirkelbuen og af linjestykket afpasses tangeringen.

Eksemplet viser, at der er flere måder at opnå geometrisk bestemthed for to naboelementer på linjeføringen – også flere end de to løsninger, der er skitseret. Eksemplet kan udvides til tre eller flere naboelementer på linjeføringen, og det kan også inkludere klothoidebuer. Betragtningerne er grundlæggende de samme, men antallet af mulige kombinationer vokser.

Fastlæggelse af stationeringen

Linjeføringens stationering fastlægges i forhold til ét punkt. Det punkt, *referencepunktet*, der vælges vil naturligt enten være tangentpunktet mellem to linjeføringselementer, eller et af de tvangspunkter, der fastlægges for at beregne linjeføringen.

Referencepunktet tildeles en stationering, og stationeringen til alle øvrige punkter på linjeføringen beregnes herfra. Den stationering, referencepunktet får tildelt, er i princippet vilkårlig. Det er dog praktisk, at linjeføringspunkterne på den vejstrækning, der konkret er i spil, alle har en positiv stationering. I eksemplet i Figur 64, har punkterne i første linjeføringselement negative stationeringsværdier; dette kan skyldes, at den pågældende delstrækning allerede er fastlagt i en anden beregning, således at det første element alene tjener til at fastlægge den resterende linjeføring korrekt i forhold hertil.

Det er endvidere praktisk, at stationeringen ikke antager unødigt høje værdier, normalt vil man søge at holde den mindste stationering, der skal anvendes i intervallet mellem 0 og 1000 m. Ved komplicerede anlæg, fx toplanskryds, kan det dog være hensigtsmæssigt, at lade stationeringen af de enkelte rampestrækninger have værdier i klart adskilte intervaller, således at der derigennem har mulighed for at skelne og derved så vidt muligt forebygger fejltagelser, når der arbejdes i marken.

Eksempel på beregningsgang

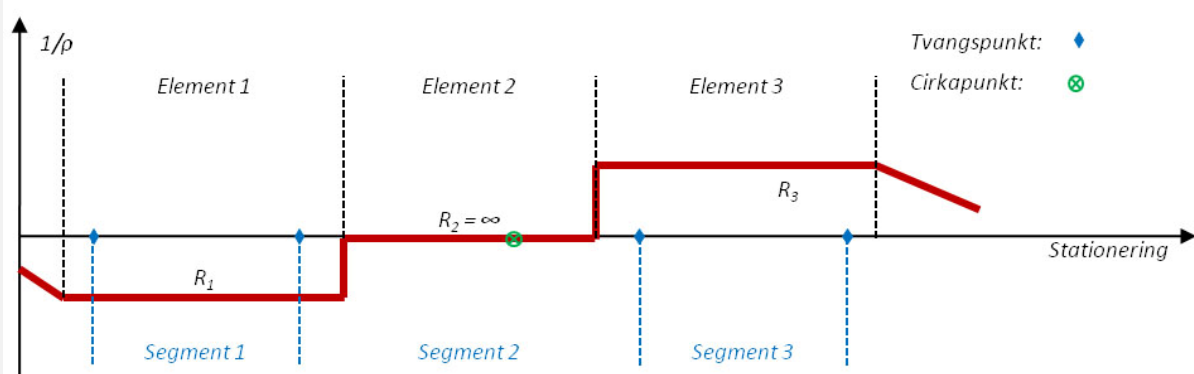
Til illustration af linjeberegningens gang beskrives i det følgende den terminologi og systematik,¹ som et lidt ældre norsk PC-program *NORVEG/NADB-2101*, betjener sig af.² En grundigere gennemgang findes hos Kristiansen (59).

Det er væsentligt at gøre sig klart, at programmets beregningsgang følger og er begrænset af de indbyggede forudsætninger, beslutningsstrukturer og algoritmer. Det betyder, at der er indlagt valg og prioriteringer, da programmet blev skrevet. Herved er også fravalgt nogle mindre hyppige kombinationer, som programmet altså ikke er i stand til at håndtere, selv om de ville kunne løses gennem manuel beregning. Denne præambel gælder alle programmer. Prisen for at gøre brug af regnemaskinernes kapacitet til at foretage omfattende kalkulationer, er at man må indordne sig under de begrænsninger, programudvikleren har opstillet, og at man må anvende sin menneskelige hjernes spændstighed til kreativt at omgå eller udfylde de lakuner, som begrænsningerne efterlader.

Segmenter og ukendte parametre

Fremgangsmåden ved brugen af programmet er, at brugeren indlægger *tvangspunkter*, som linjeføringen skal gå igennem. Princippet er, at indlægge tvangspunkterne, således at de inddeler linjeføringen i *segmenter*, der herefter hver for sig kan bestemmes, jævnfør Figur 65. Der kan indlægges op til to tvangspunkter på ét linjeføringselement.³ Derimod kan der godt være flere linjeføringselementer i hvert segment, altså mellem to nabo-tvangspunkter.

Brugeren kan endvidere indlægge såkaldte *cirkapunkter*, dvs. punkter der ligger tæt ved linjeføringen. Cirkapunkterne indgår ikke direkte i linjeberegningen, men tjener til, at beregningsprogrammet kan vælge den rette linjeføring, hvor der findes flere geometrisk mulige løsninger.



Figur 65. Kurvebånd, hvor linjeføringen ved hjælp af tvangspunkter inddeles i segmenter. Tvangspunkterne og eventuelle cirkapunkter placeres, således at linjeføringen bliver geometrisk bestemt. Efter (59).

¹ Andre programmer, blandt andet det tidligere nævnte program V102 fra Vejdatalaboratoriet i Danmark (51), har betjent sig af en anden terminologi og systematik; men basalt set er principperne de samme.

² Programmet er udviklet af Vegdirektoratet, Statens Vegvesen i Norge med henblik på terminalkørsel og er bearbejdet af NORCONSULT A/S med henblik på installation og brug på PC-ere. (53)

³ En cirkel kan således ikke umiddelbart defineres ved fastlæggelse af tre tvangspunkter.

Ved en manuel linjeberegning vil dette valg blive truffet ud fra beregnerens forståelse af linjeføringens kvaliteter.

Kriterierne for segmentinddelingen, altså placeringen af tvangspunkter, er for det første, at det enkelte segment skal indeholde 0, 2 eller 3 *ukendte parametre* for linjeføringselementerne. De parametre, der kan være tale om, er

- Et linjestykke: Længde, L
- En cirkelbue: Længde, L , og radius, R
- En klothoidebue: Længde, L , og klothoideparameter, A

De længder, der er tale om, kan være totallængden af linjeføringselementet; men ofte indgår i stedet afstande, der placerer linjeføringselementet, fx afstanden målt langs stationeringslinjen mellem et af linjeføringselementets endepunkter (tangentpunkter) og et af de omkringliggende tvangspunkter.

Parametre, der ikke er opgivet, men som lader sig beregne ud fra oplysninger om linjeførings-elementet i øvrigt, tæller ikke med som ukendte, fx vil længden af en klothoidebue være kendt, når klothoideparametrene og radierne i klothoidens endepunkter er kendt.

Kriterierne for segmentinddelingen er for det andet, at der er nogle betingelser, som skal opfyldes for rækkefølgen af linjeføringens 0-, 2- og 3-segmenter (segmenter med 0, med 2 henholdsvis med 3 ukendte parametre). Betingelserne er sammenfattet i fire udsagn:

- Et 0-segment består kun af en del af ét linjeføringselement; det er fastlåst af to givne tvangspunkter; det beregnes uafhængigt af linjeføringens øvrige segmenter
- Et 2-segment indeholder to ukendte parametre for linjeføringselementerne; det lader sig ikke beregne, før ét af nabosegmenterne er beregnet
- Et 3-segment indeholder tre ukendte parametre for linjeføringselementerne; det lader sig ikke beregne, før begge nabosegmenter er beregnet
- Mellem to 0-segmenter skal der være ét 3-segment

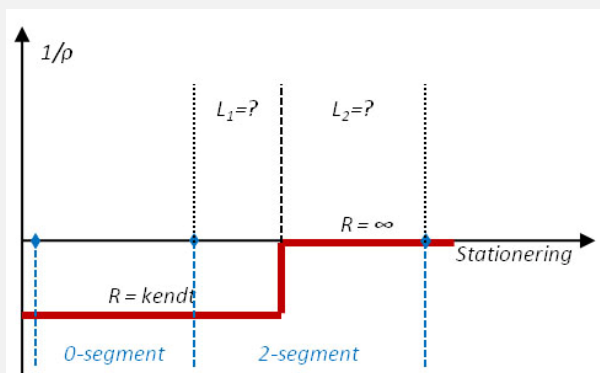
Kristiansen (59) giver følgende tre eksempler til illustration af udsagnene.

Eksempel: 0-segment

Ét element, en cirkel med kendt radius, lægges igennem to tvangspunkter. Cirkelns placering er da bestemt. Længden af cirkelbuen mellem tvangspunkterne er kendt, når radius er kendt. Segmentet har derfor ingen ukendte parametre og er et 0-segment. $\square$

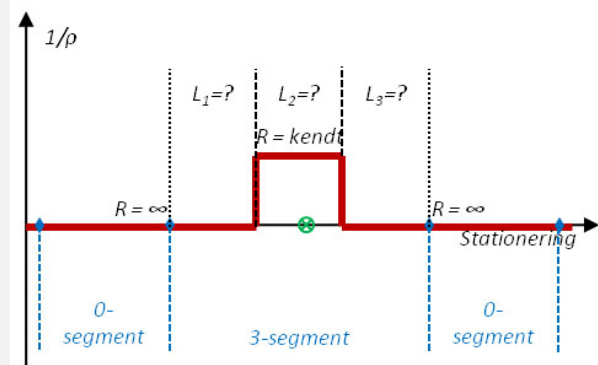
Eksempel: 2-segment

To elementer, en cirkel og en ret linje, skal beregnes. Der er, jævnfør Figur 66, to tvangspunkter på cirklen, som følgelig indeholder et 0-segment. På den rette linje er der ét tvangspunkt. Isoleret set er den rette linjes placering derfor ikke bestemt, da den kan drejes om tvangspunktet. I tillæg skal den rette linje imidlertid tangere cirklen, og den er dermed geometrisk bestemt, og tangentpunktet kan beregnes.



Figur 66. Kurvebånd visende et 2-segment. Efter (59).

Figur 67. Kurvebånd visende et 3-segment. Cirkelpunktet, der er placeret ved cirklen, er medtaget, fordi visse kombinationer ved et 3-segment giver to mulige løsninger; cirkelpunktet placeres således, at det ligger nærmest den ønskede løsning. Efter (59).



Segmentet mellem de to sidste tvangspunkter indeholder to ukendte parametre, nemlig L_1 , længden fra tvangspunktet på cirklen til tangentialpunktet, og L_2 , længden fra tangentialpunktet til tvangspunktet på den rette linje. Segmentet er altså et 2-segment.

I tilgift gøres følgende betragtning: Hvis der havde været to tvangspunkter også på den rette linje, ville begge elementer være fastlåst hver for sig, og det ville være et rent lykketræf om de tangerer hinanden. Linjeføringen ville med andre ord være overbestemt. I sådanne tilfælde vil det være nødvendigt at fjerne ét af tvangspunkterne, enten på linjen eller på cirklen, således at linjeføringen netop er geometrisk bestemt. □

Eksempel: 3-segment

Tre elementer skal beregnes, en ret linje med to tvangspunkter, en cirkel med kendt radius og en ny ret linje med to tvangspunkter, jævnfør Figur 67. De to rette linjer indeholder hvert sit 0-segment og er dermed geometrisk fastlagte. Der kan kun lægges én cirkel med en given radius, som tangerer begge de rette linjer. Cirkelns placering er følgelig også bestemt og tangentialpunkterne kan beregnes.

Segmentet i midten indeholder tre ukendte parametre: L_1 , længden fra den første linjes sidste tvangspunkt til det første tangentialpunkt med cirklen, L_2 , længden af cirkelbuen mellem tangentialpunkterne, og L_3 , længden fra det sidste tangentialpunkt til det første tvangspunkt på den sidste linje. Segmentet er derfor et 3-segment.

Supplerende anføres, at hvis der havde været givet et tvangspunkt på cirklen, så ville den ikke kunne bringes til at tangere begge de rette linjer, og linjeføringen ville have været overbestemt. Mellem endesegmenterne ville der da have været to 2-segmenter i stedet for ét 3-segment, hvilket, jævnfør det fjerde udsagn ovenfor, ikke er geometrisk muligt. □

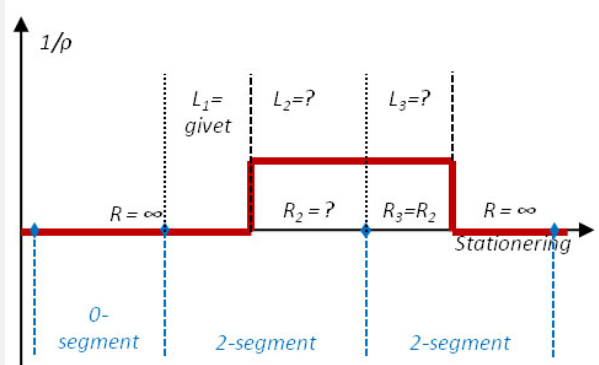
Placering af ukendte parametre

De linjeføringsselementer, som tvangspunkterne placeres på, vil indgå i to eller tre segmenter. Det kan være vanskeligt at afgøre, hvilket segment en ukendt parameter bør tilhøre i beregningerne.

Hvis den totale længde af et linjeføringsselement med ét tvangspunkt er ukendt, gennemføres beregningen med tillæg af to ukendte parametre, nemlig de to længder, L_1 og L_2 , fra tangentialpunkterne til tvangspunktet. Har linjeføringsselementet to tvangspunkter, gennemføres beregningen ligeledes med tillæg af to ukendte parametre, nemlig de to længder, L_1 og L_2 , fra tangentialpunkterne til tvangspunkterne; længden mellem tvangspunkterne og dermed totallængden vil jo kunne beregnes, når de øvrige parametre er fundet.

Hvis den totale længde, L , af et linjeføringsselement med ét tvangspunkt er kendt, men fordelingen på segmenterne er ukendt, gennemføres beregningen med tillæg af én ukendt parameter, nemlig længden L_1 , til det segment, der beregnes først; ved beregningen af det andet segment kendes da længden $L_2 = L - L_1$.

Figur 68. Kurvebånd. Et linjeføringsselement med ét eller to tvangspunkter og med ukendt radius, beregnes med radius som ukendt parameter i det segment, der beregnes først, men som kendt parameter i det eller de efterfølgende segment(er). Efter (59).



Hvis et linjeføringsselement har en ukendt radius, jævnfør Figur 68, regnes radius som ukendt parameter i det segment, der beregnes først, men som kendt parameter i det eller de efterfølgende segment(er).¹

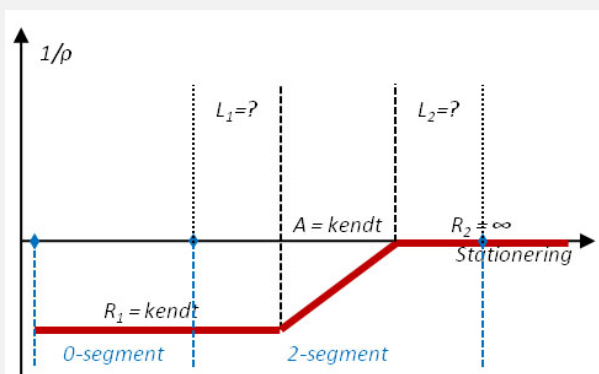
Håndtering af klothoider

Klothoider behandles efter ganske samme principper som rette linjestykker og cirkelbuer med den supplerende forholdsregel, at man så vidt muligt undgår at placere tvangspunkter på klothoiderne. Forholdsreglen skyldes ikke, at det vil være umuligt at gennemføre beregningerne, blot at beregningerne bliver ulige mere komplicerede, jævnfør de formler, der gælder for koordinatsætning af punkter på en klothoide. I de fleste tilfælde kan det undgås at placere tvangspunkter på en klothoide.

Hvis klothoideparameteren er kendt, vil klothoiden være geometrisk bestemt, og segmentinddelingen kan foregå som om klothoiden ikke eksisterer. I situationen på Figur 69 er klothoideparameteren og radius i klothoidens endepunkter kendte. Derfor, er også klothoidens længde kendt. Klothoiden har der for ingen ukendte parametre, og de to ukendte i 2-segmentet med klothoiden bliver derfor længderne L_1 og L_2 fra tvangspunkterne til tangentpunkterne med klothoiden.

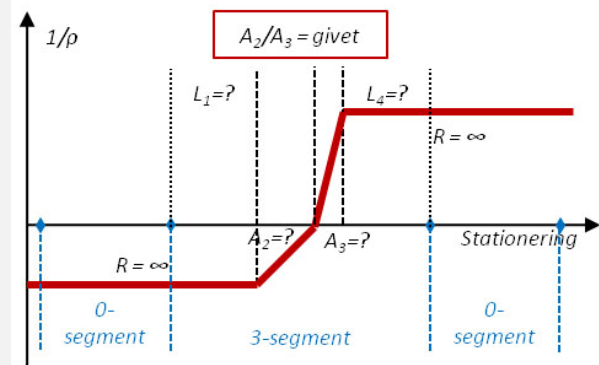
Hvis klothoideparameteren ikke er kendt, optræder der tre ukendte parametre i det segment, der indeholder klothoiden, nemlig klothoideparameteren, A , og længderne L_1 og L_2 fra tvangspunkterne til tangentpunkterne.

Figur 69. Kurvebånd. En klothoide med kendt parameter og kendte radier i endepunkterne er geometrisk bestemt, og segmentinddelingen efterlader derfor klothoiden i et segment med to ukendte parametre, nemlig de to længder, L_1 og L_2 , fra tangentpunkterne til tvangspunkterne. Efter (59).



¹ Kristiansen (53) anfører, at programmet NORVEG/NADB-2101 har visse begrænsninger ved brug af ukendt radius: enten må kurvens længde være givet eller der må være lagt et tvangspunkt på kurven. Både tvangspunkt og kendt længde er ikke mulig, og der kan heller ikke lægges to tvangspunkter på kurven, da dette ville medføre et 1-segment, hvilket ligger uden for beregningsmetodens begrænsninger. Disse begrænsninger behøver ikke at gælde ved en manuel beregning.

Figur 70. Kurvebånd. En vendeklothoide med ukendte parametre, men med kendt forhold mellem de to grenes parametre bidrager kun med 1 ukendt parameter, og segmentinddelingen placerer derfor vendeklothoiden i et segment med i alt tre ukendte parametre, nemlig én af klothoideparametrene samt de to længder, L_1 og L_2 , fra tangentpunkterne til tvangspunkterne. Efter (59).



Som bruger kan man vælge selv at fastlægge en klothoideparameter med passende skelen til de anførte tommelfingerregler baseret på kørselsdynamiske og æstetiske hensyn. Alternativt er det nødvendigt at der ligger et 0-segment på begge sider af klothoiden. Det kan opnås mest enkelt opnås ved at indlægge to tvangspunkt på begge de tilstødende elementer.

En vendeklothoide behandles som to klothoidegrene, der tangerer hinanden i et fælles begyndelsespunkt. Tvangspunkterne placeres, så de to klothoidegrene holdes inden for samme segment. Hvis begge klothoideparametre, A_1 og A_2 , er fastlagt på forhånd, er situationen analog til Figur 69, idet vendeklothoidens to klothoidegrene ligger i et 2-segment. Er den ene klothoidegrens parameter fastlagt, mens den anden er ukendt, vil vendeklothoiden ligge i et 3-segment, og beregning kræver derfor, at der placeres et 0-segment på begge sider.

Hvis begge klothoideparametre er ukendte, får segmentet 4 ukendte parametre, og det er derfor geometrisk ubestemt. For at løse denne situation kan man vælge selv at fastlægge en af klothoideparametrene, eller man kan lægge et tvangspunkt på vendeklothoiden. Alternativt kan man, jævnfør Figur 70, fastlægge forholdet mellem de to klothoideparametre: A_2/A_3 . Herved reduceres antallet af ukendte parametre til tre, og segmentet, der rummer vendeklothoiden, kan beregnes, når der er placeret et 0-segment på begge sider.

Beregningsrækkefølge

Segmenternes afhængighed af hinanden medfører, at kun visse segmentkombinationer vil give en løsning.

Ved beregningen opdeles segmentsekvensen i intervaller ved 0-segmenterne, jævnfør den tabelariske opstilling i principseksemplet i Figur 71. I hvert interval tages afsæt i det første 0-segment, derefter beregnes 2-segmenterne, der knytter sig hertil. Så beregnes intervallets sidste 0-segment og disses 2-segmenter, hvorefter det mellemliggende 3-segment kan fastlægges. Herefter fortsættes med næste interval.

Placering af tvangspunkter

De fleste tvangspunkter optages fra et grundkort, og de vil altid være behæftet med en usikkerhed. Meget kritiske strækninger må derfor ved den endelige linjeberegning fastlægges ved tvangspunkter, der er opmålet i marken, så usikkerheden reduceres mest muligt. Det vil gælde tvangspunkter, der fastlægger passager af eksisterende broer, samt tvangspunkter, der angiver beliggenheden af de strækninger af en eksisterende vej, der ansluttes til ved den nye linjeførings begyndelse eller ende.

Interval	A				B							C			D
Segmenttype	2	2	2	0	2	2	3	2	2	2	0	2	3	0	2
Rækkefølge	4	3	2	1	5	6	11	10	9	8	7	12	14	13	15

Figur 71. Beregningsrækkefølgen følger de intervaller, som 0-segmenterne inddeler linjeføringen i. Først når intervallets 0- og 2-segmenter er fastlagt, kan 3-segmentet bestemmes.

Kristiansen (59) anfører, at det herudover er fornuftigt skele til usikkerhederne ved beregningen, når beregningsrækkefølgen fastlægges, dvs. når man afgør, hvor der skal placeres 0-, 2- og 3-segmenter, og når de enkelte segmenters tvangspunkter herefter udvælges. Såvel beregningsgang som placeringen af tvangspunkter bør ske, således at usikkerheder indvirker mindst muligt på beregningernes resultat.

0-segmenter bør lægges på lange linjeføringslementer, og tvangspunkterne bør placeres således at de får størst mulig afstand. Tvangspunkterne kan eventuelt lægges på forlængelsen af elementet.

Når der kun er ét tvangspunkt på et linjeføringslement, bør tvangspunktet lægges så langt »fremme« i beregningsretningen som muligt, dvs. så langt fra det 0-element, som beregningen begynder fra. Tvangspunktet kan eventuelt placeres i elementets forlængelse »fremad« i beregningsretningen, men ikke bagud.

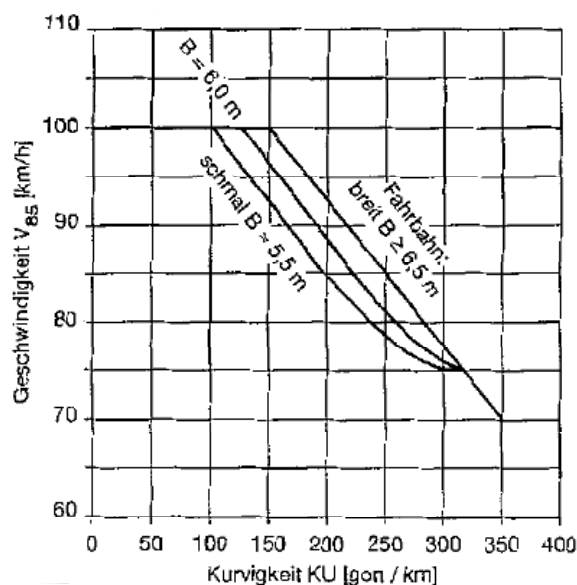
Kurvethed

Kurvetheden, K , er et mål for hvor store vinkeldrejninger, linjeføringen indeholder pr. længdeenhed. Den defineres ved udtrykket:

$$[173] \quad K = \frac{\sum_{i=1}^n |\gamma_i|}{L}$$

hvor γ_i er vinkeldrejningen gennem linjeføringerne cirkel- og klothoidebuer
 L er strækningslængden

Kurvetheden opgøres for ensartede delstrækninger. Udtrykket anvendes blandt andet i de tyske vejregler (37) og er her bestemmende for den mindstebredde, kørebanen bør have, jævnfør Figur 72.



Figur 72. De tyske vejreglers sammenhæng mellem kurvethed, benævnt KU, hastighed V_{85} og mindste kørebanebredde ved nyanlæg. Bemærk, at kurvetheden [gon/km] baserer sig på nygrader ($\pi = 200$ gon]. Efter (37).

Længdeprofilelementer

Længdeprofilet opbygges af rette linjer og af buer, enten cirkelbuer eller 2. grads parabelbuer.

Overgangskurver anvendes ikke i længdeprofilet inden for vejbygningsfaget; vejenes vertikalkurveradier er så store, at det ikke er nødvendigt. Jævnfør i øvrigt Figur 73.

Længdeprofilets grundlæggende, rent geometriske vilkår er de samme, som de der gælder ved linjeføringen. Det er blandt andet en forudsætning, at længdeprofilets naboelementer har fælles tangentpunkter, dvs. at der ikke er spring i længdeprofilet, og at den sammensatte kurve er differentiabel.

De kørselsdynamiske og æstetiske vilkår, der er styrende for fastlæggelsen af længdeprofilets retlinede strækninger og vertikalkurver, er derimod nogle andre end dem, der indgår ved fastlæggelsen af linjeføringen.

Den rette linje

Længdeprofilets rette linjer er begrænset af den gradient, eller hældning, der kan anvendes. Gradienten, i , udtrykker stationeringslinjens hældning med vandret, og defineres, jævnfør Figur 74:

$$[174] \quad i = \tan \alpha = \frac{\Delta Z}{\Delta L}$$

hvor α er vinklen mellem den rette linje i længdeprofilet og en vandret linje

Gradienten angives i Danmark i promille [‰], og den regnes positiv for fald og negativ for stigninger i stationeringsretningen.¹

Gradienten begrænses af de kørselsdynamiske vilkår, der fordrer, at et køretøj skal have tilstrækkelig motorkraft til at kunne passere en (længere) stigning opad, og at et køretøj skal kunne bringes til standsning også når det kører nedad.

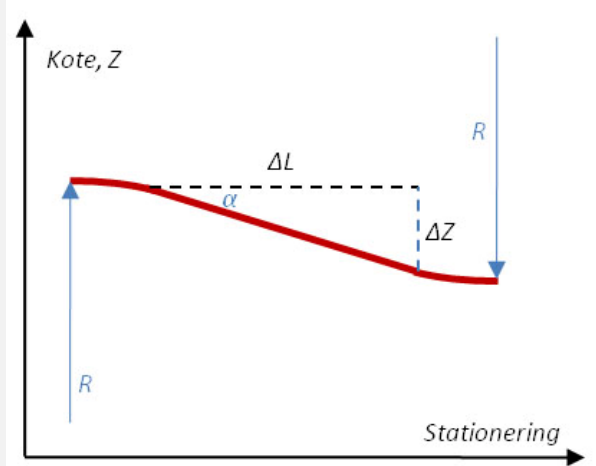
Figur 73. Overgangskurver optræder ikke i vejenes længdeprofil. Derimod udnyttes klothoidens kørselsdynamiske kvaliteter også i det vertikale plan på visse rutschebaner. Figuren viser klothoide-loops på rutschebanen Shockwave i forlystelsesparken Texas Under Six Flags, Arlington, Texas. Fra <http://www.coastergallery.com/2001T/SFOT.html>.²



¹ Gradienten kan være omtalt som længdefald eller stigning. I så fald er praksis ofte, at regne længdefaldet for positiv nedad, og stigningen for positiv opad, i stationeringsretningen.

² En kort omtale af rutschebanegeometri findes blandt andet hos Vestergaard (48).

Figur 74. Gradienten defineres som forholdet mellem kote-forskellen, ΔZ , og stationeringsdifferencen, ΔL , på den rette linjes endepunkter.



I praksis betyder disse begrænsninger, der er anført i vejreglerne(15). Gradienten helst skal være mindre en 35 ‰ på lange strækninger og ikke må overstige 60 ‰, samt at det resulterende fald ikke må være større end 70 ‰.

Ved veikryds skal sekundærvejen have en hvilestrækning på mindst 20 m, hvor gradienten ikke overstiger 25 ‰. Det samme gælder i rundkørsler og på alle veje, der indmundende i en rundkørsel.

Cirkel- og parabelbuer

Vertikalkurvernes størrelse angives ved deres radius, R . Ved parabler angives krumningsradius til parablens toppunkt – forskellen mellem parablen og cirklen er betydningsløs ved de vertikalkurver, der anvendes ved vejbygning.

Vertikalkurveradierne regnes positive, når kurven ligger over centrum, altså ved konvekse kurver (bakketop), og negative, når kurven ligger under centrum, altså ved konkave kurver (dal).

Vertikalkurvernes størrelse begrænses af, at der skal være fornødent sigt ved den hastighed, som vejen er beregnet til.

I konvekse vertikalkurver skal sigt være til stede hen over bakketoppen fra øjenhøjden i et lavt køretøj. I konkave vertikalkurver skal sigt være til stede under eventuelle brobygværker fra øjenhøjden i et højt køretøj.

Disse vilkår resulterer i mindsteværdier for vertikalkurvernes radier, jævnfør vejreglerne. (15)

Længdeprofilberegning

Beregningen af længdeprofilen indebærer at fastlægge sammenhørende værdier for stationering og kote, Z , til tangentpunkterne mellem længdeprofilens naboelementer. Når disse hovedpunkter er fastlagt, kan koterne til de mellemliggende detailpunkter bestemmes.

Udgangspunktet for beregningen er en skitse, der viser, hvordan længdeprofilen skal se ud. På grundlag af skitsen fastlægges rækkefølgen af de enkelte elementer og de parametre, der indgår ved beregningen.

Den klassiske, manuelle metode for beregning af længdeprofilen anvender fastlæggelse af knækpunkter, dvs. tangenternes skæringslinjer, samt valg af radius for de mellemliggende afrun-

dingskurver. Det er altså samme fremgangsmåde som ved manuel beregning af linjeføringens hovedelementer, jævnfør ovenfor.

Computerstøttede programmer til længdeprofilberegning inkluderer denne metode, men medtager typisk også kombinationer, hvor vertikalkurverne fastlægges først, og de retlinede strækninger herefter indlægges som tangenter. Tillige kan programmerne have den facilitet, at vertikalkurverne tilpasses, således at længdeprofilet over hele strækningen så vidt muligt udelukkende består af afrundingskurver.

Det skal påses, at længdeprofilet er geometrisk bestemt. Det vil være tilfældet, hvis det første element er en fastlagt ret linje i længdeprofilet, og hvis der til de efterfølgende beregninger angives sæt af tre parametre, der angår den følgende afrundingskurve og den rette linje (eventuelt tangent), som følger efter kurven; af sættet skal mindst den ene være om afrundingskurven.

Parametrene er for retlinede strækninger:

- i_i , hældningen på den rette linje (regnet med fortegn)
- Sammenhørende værdier af stationering, S_i , og kote, Z_i , for et eller to tvangspunkter på den retlinede strækning eller dennes forlængelse

For vertikalkurver er parametrene:

- R_i , krumningsradius i vertikalkurvens toppunkt (regnet med fortegn)
- Sammenhørende værdier af stationering, S_i , og kote, Z_i , for et tvangspunkt på vertikalkurven

Bemærk, at et tvangspunkt opfattes som én parameter. De to sammenhørende værdier stationering, S_i , og kote, Z_i , regnes altså som én oplysning.

Resultatet af beregningen af længdeprofilets hovedpunkter kan eksempelvis rumme de informationer, der er skitseret i Figur 75.

Element	Tangentpunkt		Radius R [m]	Gradient i [‰]	Knæpunkt	
	Station	Kote [m]			Station [m]	Kote [m]
1			L	-40,0		
2	-60,80	20,97	C	40,00	-60,00	21,00
3	-59,20	21,00	L	0,0		
4	280,06	21,00	C	6000,00	400,01	21,00
5	519,86	16,21	L	40,0		
6	605,19	12,79	C	-5998,04	725,01	8,00
7	844,92	8,00	L	0,0		
8	932,52	8,00	C	-4500	1000,01	8,00
9	1067,46	10,02	L	30,0		
10	1232,55	14,98	C	4499,73	1300,00	17,00
11	1367,48	17,00	L	0,0		
12	1747,01	17,00	C	6000,00	1844,18	17,00
13	1941,31	13,85	L	32,4		
14	2048,48	10,38	C	-4500,00	2217,82	4,89
15	2387,08	12,16				

Figur 75. Skitse af resultattabel fra en længdeprofilberegningens hovedpunktsberegning. Tabellen angiver station og kote til tangentpunkter og radius henholdsvis gradient af afrundingskurverne og de mellemliggende tangenter. Endvidere angiver tabellen station og kote til tangenternes skæringspunkter (knæpunkterne). Data fra (60).

Afslutning

Tracéringselementerne er de byggesten, der anvendes til at opbygge tracéet. Forståelse af tracéringselementerne er en nødvendig forudsætning for at kunne designe og detailprojektere en vejstrækning. Det gælder såvel med hensyn til resultatets kvaliteter som med hensyn til at gennemføre projekteringen omkostningseffektivt. Men det er ikke tilstrækkelige forudsætninger!

Det grundlæggende projekteringsarbejde kræver i dag beherskelse af et professionelt, computerstøttet projekteringssystem. Systemet fungerer interaktivt; det foretager beregninger og præsenterer løsninger øjeblikkeligt. Det er imidlertid begrænset af dets algoritmer. Det gode resultat fordrer derfor, at man kan spille på alle finurlighederne i sit program, samtidig med at man har teoretisk fundament til at forholde sig kritisk til de fundne løsninger og til at kunne afdække alternative løsningsmuligheder.

Vejformgivningens mere kreative designarbejde kræver, at forståelsen af tracéringselementerne kombineres med indsigt i og forståelse af alskens andre hensyn. Linjeføring og længdeprofil beregnes, som sagt hvert for sig, men ved traceringen fastlægges de under ét. Målet med den rumlige tracéring er at opnå et vejforløb, der er logisk og selvforklarende, og som er i smuk samklang med de landskabsrum, vejen passerer. Herudover skal tracéen kunne du. På det tekniske plan fordrer det eksempelvis forståelse af de kørselsdynamiske forhold og vejafvandingens funktion. På det trafikafviklingsmæssige plan indgår blandt andet hensyn til trafikanternes formåen og adfærd, alene og i samspillet med andre trafikanter. Vejformgivning er altså en multidisciplinær øvelse.

Tracéringselementerne kan altså ikke stå alene. Men beherskelse af dem er én af hovedforudsætningerne for, at man kan skabe vejanlæg, som man kan være bekendt.

Appendiks A – Notation¹

Store latinske bogstaver

Symbol	Forklaring	Enhed
F_C	centripetalkraft	N
F_F	friktionskraft	N
F_G	tyngdekraft	N
F_L	luftmodstand	N
F_R	rullemodstand	N
F_T	trækkraft	N
L_b	bremselængde	m
L_r	reaktionslængde	m
L_s	standselængde	m
M	masse	kg
N	normalkraft	N
R_H	horisontalkurveradius	m
R_V	vertikalkurveradius	m
S_M	mødesigtelængde	m
S_O	overhalingssigtelængde	m
S_S	stopsigtelængde	m
V	hastighed	km/h

Små latinske bogstaver

Symbol	Forklaring	Enhed
a	acceleration	m/s
f_r	sideaccelerationskoefficient	[-]
f_t	tangentiel accelerationskoefficient	
g	tyngdeacceleration	m/s
h_K	køretøjshøjde	m
h_O	objekthøjde	m
$h_\emptyset$	øjnehøjde	m
i	sidegradient	‰
s	længdegradient	‰
t_B	bremsetid	s

¹ Oversigten er ikke komplet, og der kan være afvigelser i teksten.

Symbol	Forklaring	Enhed
t_r	reaktionstid	s
t_R	reaktionstid	s
v	hastighed	m/s
v_{85} / V_{85}	85 %-fraktilens hastighed	m/s km/h
v_m / V_m	middelhastighed i et snit i et tidsinterval	m/s km/h
v_R / V_R	rejsehastighed	m/s km/h
$v_\emptyset / V_\emptyset$	ønsket hastighed	m/s km/h

Græske bogstaver

Symbol	Forklaring	Enhed
α	vinkel mellem vandret plan og vejoverflade	°
γ_μ	sikkerhedsfaktor, friktion	[-]
μ	friktionskoefficient	[-]
μ_B	bremsefriktionskoefficient	[-]
μ_k	kinetisk friktionskoefficient	[-]
μ_r	radial friktionskoefficient	[-]
μ_s	statisk friktionskoefficient	[-]
μ_t	tangential friktionskoefficient	[-]
μ_T	total friktionskoefficient	[-]
μ_R	rullefriktionskoefficient	[-]

Bibliografi

1. **Fyns Amt og Odense Kommune.** *Etablering af Ring 3 mellem Nyborgvej og Kertemindevej. Redegørelse for vejanlæggets virkning på miljøet (VVM).* Odense : Fyns Amt, 2002. 87 7343 517 1.
2. **Hubendick, P.** *SRS Vägformgivning.* Stockholm : SRS Förlag, 1976.
3. **Egebjerg, U. og Augustenborg, B.** *Smukke veje - ABC om vejarkitektur.* København : Vejdirektoratet, 2007.
4. **Egebjerg, U., et al.** *Smukke veje - en håndbog om vejarkitektur.* København : Vejdirektoratet, 2002.
5. **Vejreglerrådet.** *Beplantning i åbent land. Hæfte 2. Planlægning og projektering.* København : Vejdirektoratet, 2006. ISBN 87 7923 910 2.
6. **Statens Vegvesen.** *Linjeføringsteori - Håndbok 265.* Oslo : Statens Vegvesen Vegdirektoratet, 2008. Håndbok.
7. **Transportministeriet.** *Bekendtgørelse om køretøjers største bredde, længde, højde, vægt og akseltryk. BEK nr. 657 af 19. juni 2007.* 2007.
8. *Forordning om Vej-Væsenet i Danmark.* København : P.M. Høpfner, 1793 (Genoptrykt og udgivet af Vejdirektoratet 1993).
9. *Hans Excellerce, Herr Geheime Raad og Greve Reventlous Plan til en forbedret Indretning af Veivæsenet i Kongeriget Danmark.* København : Lektor Claus Bjørn, Københavns Universitet, og Vejdirektoratet, 1993. 87 7491 496 0.
10. **Vejreglerrådet.** *Byernes trafikarealer. Hæfte 2. Traceringselementer.* København : Vejdirektoratet, 2000.
11. **Ministeriet for offentlige arbejder, Vejdirektoratet.** *Vejregler (Udkast). Almindelige regler for vejes linjeføring samt længde- og tværprofiler m.v. til vejledning ved anlæg, udvidelse og ombygning af offentlige veje.* København : Ministeriet for offentlige arbejder, Vejdirektoratet, 1960.
12. —. *Vejregler (Udkast). Almindelige regler for vejes linjeføring samt længde- og tværprofiler m.v. til vejledning ved anlæg, udvidelse og ombygning af offentlige veje.* København : Ministeriet for offentlige arbejder, Vejdirektoratet, 1964.
13. **Vejdirektoratet.** *Motorveje - projekteringsregler.* København : Motorveje.
14. **Vejreglerrådet.** *Veje og stier i åbent land. Hæfte 1. Forudsætninger for den geometriske udformning. Vejregelforslag.* København : Vejdirektoratet, 1999.
15. —. *Veje og stier i åbent land. Hæfte 2. Tracering. Vejregelforslag.* København : Vejdirektoratet, 1999.
16. —. *Veje og stier i åbent land. Rettelsesbog.* København : Vejdirektoratet, 2007.
17. —. *Trafikarealer, land. Planlægning af veje og stier i åbent land. Vejregelforberedende rapport. Høringsudgave.* København : Vejdirektoratet, 2006.
18. —. *Trafikarealer, land. Hæfte 3. Tværprofiler. Håndbog. Høringsudgave.* København : Vejdirektoratet, 2006.
19. —. *Trafikarealer, land. Hæfte 3x. Tværprofiler. Eksempler. Høringsudgave.* København : Vejdirektoratet, 2006.
20. —. *Veje og stier i åbent land. Hæfte 4.0. Planlægning af vejkryds. Vejregelforslag.* København : Vejdirektoratet, 2000.
21. —. *Veje og stier i åbent land. Hæfte 4.1. Prioriterede vejkryds. Vejregelforslag.* København : Vejdirektoratet, 2000.
22. —. *Veje og stier i åbent land. Hæfte 4.2. Rundkørsler. Vejregelforslag.* København : Vejdirektoratet, 2001.
23. —. *Signalregulerede vejkryds i åbent land. Hæfte 4.3. Vejregelforslag.* København : Vejdirektoratet, 2002.
24. —. *Veje og stier i åbent land. Hæfte 4.4. Toplankryds. Vejregelforberedende rapport.* København : Vejdirektoratet, 2005.

25. **Vejdirektoratet.** Revision af vejreglerne for motorveje, nye standselængder og ny objekthøjde. København : Vejdirektoratet, 3. Juli 2009.
26. —. *Indstilling. Forslag om revision af standselængder m.m. på motorveje.* København : s.n., 2009.
27. **Vejreglerrådet.** *Byernes trafikarealer. Hæfte 0. Vejplanlægning i byområder.* København : Vejdirektoratet, 2000.
28. —. *Byernes trafikarealer. Hæfte 1. Forudsætninger for den geometriske udformning.* København : Vejdirektoratet, 2000.
29. —. *Byernes trafikarealer. Hæfte 3. Tværprofiler.* København : Vejdirektoratet, 2000.
30. **Vejregeludvalget.** *Byernes trafikarealer. Hæfte 10. Det visuelle miljø.* København : Vejdirektoratet, 1992.
31. **Vejreglerrådet.** *Vej- og trafikteknisk ordbog.* København : Vejdirektoratet, 2004. Vejregel.
32. **Justitsministeriet.** *Færdselsloven. LBK nr. 984 af 5. oktober 2009.* 2009.
33. **Transportministeriet.** *Bekendtgørelse om vejafmærkning.* København : Vejdirektoratet, 2006. Bekendtgørelse nr. 784 af 6. juli 2006.
34. **Ministeriet for Offentlige Arbejder.** *Vejregler. Normer for Anlæg, Udvidelse og Ombygning af Veje, Gader og Stier.* København : J.H. Schultz A/S, 1943.
35. **Vejregeludvalget.** *Typekatalog for veje og stier i åbent land.* København : Vejdirektoratet, 1981.
36. **Borchardt, D., et al.** *RAL-L-1 Kommentar zu den Richtlinien für die Anlage von Landstrassen. Teil: Linienführung. Abschnitt: Elemente der Linienführung. Ausgabe 1973.* Köln : Forschungsgesellschaft für das Strassenwesen, 1979.
37. **Forschungsgesellschaft für Strassen- und Verkehrswesen.** *Richtlinien für die Anlage von Strassen RAS - Teil: Linienführung RAS-L.* Köln : FGSV Verlag GmbH, 1995.
38. **Andresen, A. og Wambold, J.C.** *Friction Fundamentals, Concepts and Methodology.* Montreal : Transport Canada, 1999. TP 13837E.
39. **Færdselsstyrelsen, Bilteknisk Afdeling.** *Sommerdæks og vinterdæks bremseegenskaber ved lav temperatur mv., forskningsresultater og målinger.* København : Færdselsstyrelsen, 2006.
40. **Hall, J.W., et al.** *Guide for Pavement Friction.* Washington DC : TRB, 2009.
41. **Bendtsen, Hans.** *Rolling resistance, fuel consumption - literature review.* Roskilde : Road Directorate, Dansk Road Institute, 2004. Technical note 23.
42. **Schmidt, B. og Jensen, B.R.** *Friktion og MPD-tal.* Roskilde : Vejdirektoratet, Vejteknisk Institut, 2005.
43. **Greibe, Poul.** *Determination of Breaking Distance and Driver Behaviour based on Braking Trials. Paper fra TRB Annual Meeting.* Lyngby : Trafitec, 2008.
44. **Bolet, Lars.** *Problematisk grundlag for nye standselængder - åbent brev til Vejreglerrådet. Trafik & Veje.* 2009, 11, s. 44-48.
45. **Bontell, Caj.** *Dokumentation av färdtekniska grundvärden och linjeföring.* Borlänge : Vägverket, 1983. TU-Meddelande.
46. **FGSV.** *Richtlinien für die Anlage von Autobahnen - RAA.* Köln : Forschungsgesellschaft für Strassen- und Verkehrswesen e.V., 2008.
47. **Herrstedt, L.** *Dimensioneringsgivende Trafikant. Reaktionstid, Bremsereaktionstid og Beslutningstid. Litteraturstudium - Sammenfatning.* Lyngby : Trafitec, 2007.
48. **Greibe, Poul.** *Bremselængde, friktion og adfærd. Resultater og anbefalinger baseret på bremseforsøg.* s.l. : Ikke publiceret, 2008.
49. **Transportministeriet.** *Bekendtgørelse om anvendelse af vejafmærkning. BEK nr. 783 af 06/07/2006.* København : Retsinformation.dk, 2006.
50. **Ludvigsen, Morten.** *Forelæsninger over vejbygning.* København : Danmarks Ingeniørakademi, 1960.
51. **Schacke, Ivar.** *Overgangskurve og overhøjde.* København : Laboratoriet for vejdatabehandling, Juni 1968.

52. **Ravn, H.H.** *Overgangskurver*. s.l. : Duplikeret notat, 1967.
53. **Thiesen, Klaus.** *Overgangskurver. Klothoiden's beregning og afsætning*. Kgs. Lyngby : Institut for Landmåling og Fotogrammetri, 1971.
54. **Vestergaard, Erik.** Vestergaards Matematiksider: Vejgeometri. *Vestergaards Matematiksider*. [Online] [Citeret: 16. Maj 2010.] <http://www.matematiksider.dk/vejgeometri.html>.
55. **Kasper, Hugo, Schürba, Walter og Lorenz, Hans.** *Die Klotoide als Trassierungselement*. Bonn : Ferd. Dümmlers Verlag, 1968.
56. **Lorenz, Hans.** *Trassierung und Gestaltung von Strassen und Autobahnen*. Wiesbaden und Berlin : Bauverlag GMBH, 1970.
57. **Vejdatalaboratoriet.** *Vejprojektering. Linjeføring. Program V102*. Herlev : s.n., 1973.
58. **Osterloh, Horst.** *Strassenplanung mit Klothoiden - Einrechnung von Trasse und Gradienten*. Wiesbaden : Baurverlag GmbH, 1965.
59. **Kristiansen, Jørgen.** *Brugervejledning til PC-programmet NORVEG/NADB-2101: Beregning af linieføringens hovedpunkter*. Aalborg : Institut for Samfundsudvikling og Planlægning, 1987. ISSN 0902-8056.
60. **Vejdatalaboratoriet.** *Vejprojektering. Længdeprofil. Program V107*. Herlev : Vejdatalaboratoriet, 1973.
61. **AASHTO.** *A Policy om Geometric Design of Highways and Streets*. Washington, D.C. : AASTHO, 2004.